Zadanie 1

a)

$$\vec{M}_0(\vec{P}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k} = [0; -12; 12]$$

$$\vec{M}_0(\vec{P}_2) = \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = [-4; -8; -4]$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{P}_1) + \vec{M}_0(\vec{P}_2) = [0; -12; 12] + [-4; -8; -4] = [-4; -20; 8]$$

b)

Wektor główny:

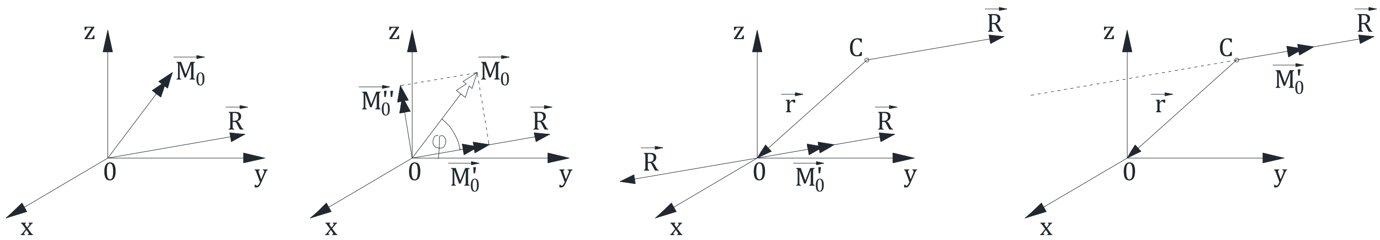
$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = [-2; 2; 2] + [3; -2; 1] = [1; 0; 3]$$

$$R = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Moment główny:

$$\vec{M}_0 = [-4; -20; 8]$$

$$M_0 = \sqrt{4^2 + 20^2 + 8^2} = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$$



Pierwszy rysunek przedstawia układ wyjściowy (oznaczono wektor główny i moment główny). Na rysunku drugim moment główny zostaje rozłożony na składowe: prostopadłą ($\vec{M}_0''$) i równoległą ($\vec{M}_0'$) do kierunku wektora głównego. Następnie wektor $\vec{M}_0''$ zostaje rozłożony na parę sił $\vec{R}$ na ramieniu $\vec{r}$, co przedstawia trzeci rysunek. Siły w punkcie 0 równoważą się, a moment $\vec{M}_0'$, który jest niezmiennikiem układu zostaje zaczepiony w punkcie C (rysunek ostatni).

Wyznaczenie kąta rzutowania momentu głównego na kierunek wektora głównego (kąt między wektorami).

$$\cos\varphi = \frac{x_{M_0} \cdot x_R + y_{M_0} \cdot y_R + z_{M_0} \cdot z_R}{R \cdot M_0} = \frac{1 \cdot (-4) + 0 \cdot (-20) + 3 \cdot 8}{12\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{3\sqrt{30}}$$

Wyznaczenie wektora $\vec{M}_0'$ - rzutu momentu głównego na kierunek wektora głównego.

$$\vec{M}_0' = \left(\vec{M}_0 \cdot \frac{\vec{R}}{R}\right) \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \left(\frac{1}{R} \cdot M_0 \cdot R \cdot \cos\varphi\right) \cdot \frac{\vec{R}}{R} = M_0 \cdot \frac{1}{R} \cdot \cos\varphi \cdot \vec{R}$$

$$\vec{M}_0' = 12\sqrt{3} \cdot \frac{5}{3\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot [1; 0; 3] = 2 \cdot [1; 0; 3] = [2; 0; 6]$$

Wyznaczenie momentu głównego dla układu zaczepionego w punkcie C(x,y,z), względem którego układ wyjściowy jest przesunięty o wektor $\vec{r} = [-x, -y, -z]$.

$$\vec{M}_C = \vec{M}_0 + \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (M_{0x} - 3y + 0z) \cdot \vec{i} + (M_{0y} + 3x - z) \cdot \vec{j} + (M_{0z} - 0x + y) \cdot \vec{k} =$$

$$= (-4 - 3y) \cdot \vec{i} + (-20 + 3x - z) \cdot \vec{j} + (8 + y) \cdot \vec{k} = [-4 - 3y; -20 + 3x - z; 8 + y]$$

Aby układ był zredukowany do skrętnika, moment główny w nowym układzie $\vec{M}_C$ musi być równy rzutowi momentu głównego na kierunek wektora głównego w układzie wyjściowym.

$\vec{M}_C = \vec{M}'_0$

$[-4 - 3y; -20 + 3x - z; 8 + y] = [2; 0; 6]$

Z porównania współrzędnych powstaje układ równań:

$$\begin{cases} 2 = -4 - 3y \\ 0 = -20 + 3x - z \\ 6 = 8 + y \end{cases}$$

Równanie pierwsze jest równoważne z ostatnim i wynika z niego, że:

$y = -2$

Drugie równanie:

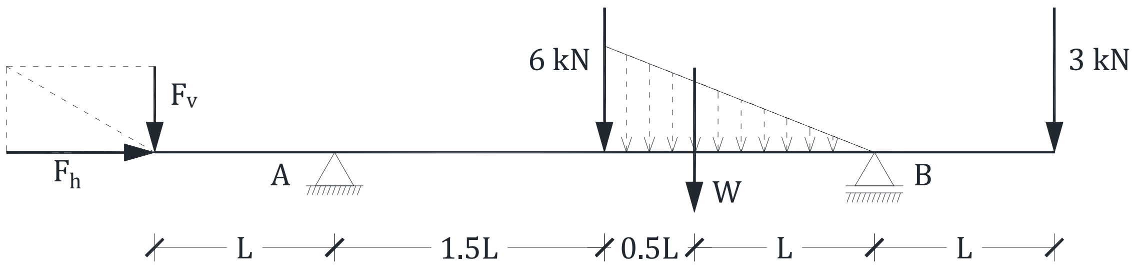
$3x - z + 20 = 0$

Oś centralną nowego układu określa więc prosta dana powyższymi równaniami:

$$\begin{cases} 3x - z + 20 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ostatecznie, podany układ sił po zredukowaniu do skrętnika ma postać dwóch kolinearnych wektorów: $\vec{R} = [1; 0; 3]$ oraz $M'_0 = [2; 0; 6]$ o linii działania danej układem równań $\begin{cases} 3x - z + 20 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$.

<u>Zadanie 2</u>



$F_V = F \cdot \sin 30^{\circ} = 0.5F$
$W = 0.5 \cdot 10 \cdot 1.5L = 7.5L$

$\sum M_A = 0$
$F_V \cdot L - 6 \cdot 1.5L - W \cdot 2L + R_B \cdot 3L - 3 \cdot 4L = 0$
$0.5F \cdot L - 9L - 7.5L \cdot 2L + 3R_B \cdot L - 12L = 0$
$3R_B \cdot L = 21L + 15L^2 - 0.5F \cdot L$
$R_B = 7 + 5L - \frac{1}{6}F$

Warunek:
$R_B \leq 4\ kN$
$7 + 5L - \frac{1}{6}F \leq 4$
$\frac{1}{6}F \geq 3 + 5L$
$F \geq 18 + 30L$

Aby podpora B nie uległa zniszczeniu siła F musi mieć wartość równą co najmniej $18 + 30L$.
Np. przyjmując $L = 1.0$ m, siła F powinna wynosić 48 kN.