Zadanie 1

Wzór rozwiązania

Metoda Eulera – równanie Eulera rzędu II:

$$v''(z) = -\frac{M(z)}{EI} \Rightarrow EI \cdot v''(z) = -M(z)$$
$$EI \cdot v'(z) = -\int M(z)dz$$
$$EI \cdot v(z) = -\int(\int M(z)dz)dz$$
$$\Rightarrow v(z) = \frac{-\int(\int M(z)dz)dz}{EI}$$

Warunki brzegowe dla wspornika:

$$\begin{cases} v'(z=0) = 0 \\ v(z=0) = 0 \end{cases}$$

a)

$M(z) = -12(2-z) = -24 + 12z\ [kNm]$

$EI \cdot v''(z) = 24 - 12z$

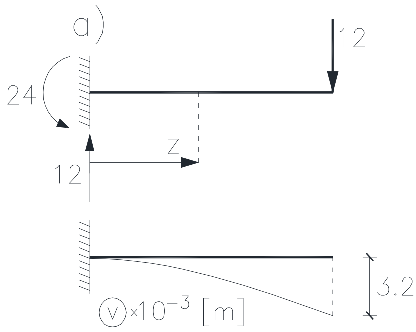
$EI \cdot v'(z) = 24z - 6z^2 + C_1$

$EI \cdot v(z) = 12z^2 - 2z^3 + C_1 z + C_2$

Z warunków brzegowych: $C_1 = C_2 = 0$

$$v(z) = \frac{12}{10000}z^2 - \frac{2}{10000}z^3\ [m]$$

$v_{max} = v(z=2) = \frac{12}{10000}2^2 - \frac{2}{10000}2^3 = 0.0032m = 3.2mm$



b)

$M(z) = -\frac{6\cdot(2-z)^2}{2} = -12 + 12z - 3z^2\ [kNm]$

$EI \cdot v''(z) = 12 - 12z + 3z^2$

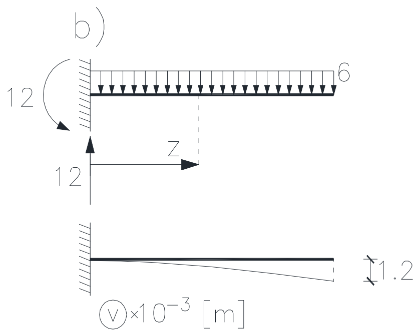
$EI \cdot v'(z) = 12z - 6z^2 + z^3 + C_1$

$EI \cdot v(z) = 6z^2 - 2z^3 + \frac{z^4}{4} + C_1 z + C_2$

Z warunków brzegowych: $C_1 = C_2 = 0$

$$v(z) = \frac{6}{10000}z^2 - \frac{2}{10000}z^3 + \frac{1}{40000}z^4\ [m]$$

$v_{max} = v(z=2) = \frac{6}{10000}2^2 - \frac{2}{10000}2^3 + \frac{1}{40000}2^4 = 0.0012m = 1.2mm$



c)

$M(z) = -16 + 12z - \frac{1}{2}\cdot z \cdot \left(12\cdot\frac{z}{2}\right)\cdot\frac{z}{3} = -16 + 12z - z^3\ [kNm]$

$EI \cdot v''(z) = 16 - 12z + z^3$

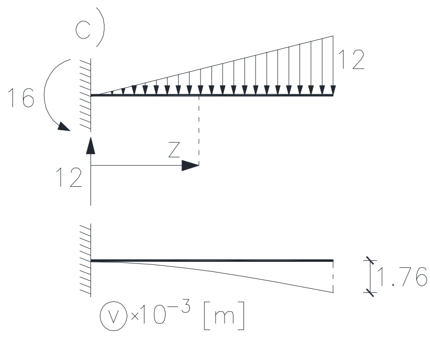
$EI \cdot v'(z) = 16z - 6z^2 + \frac{z^4}{4} + C_1$

$EI \cdot v(z) = 8z^2 - 2z^3 + \frac{z^5}{20} + C_1 z + C_2$

Z warunków brzegowych: $C_1 = C_2 = 0$

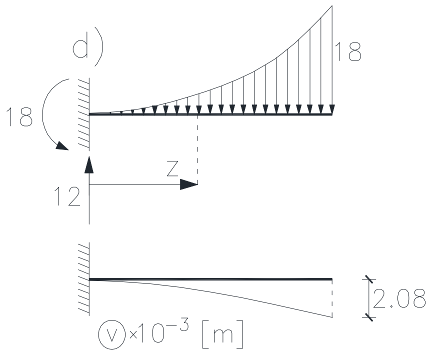
$$v(z) = \frac{8}{10000}z^2 - \frac{2}{10000}z^3 + \frac{1}{200000}z^5\ [m]$$

$v_{max} = v(z=2) = \frac{8}{10000}2^2 - \frac{2}{10000}2^3 + \frac{1}{200000}2^5 = 0.00176m = 1.76mm$



d)

Równanie obciążenia:



$y = az^2$

$\begin{cases} z = 2 \\ y = 18 \end{cases}$

$18 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$

$y = \frac{9}{2} z^2$

$M(z) = -18 + 12z - \frac{1}{3} \cdot z \cdot \left(\frac{9}{2} \cdot z^2\right) \cdot \frac{z}{4} = -18 + 12z - \frac{3}{8} z^4 \ [kNm]$

$EI \cdot v''(z) = 18 - 12z + \frac{3}{8} z^4$

$EI \cdot v'(z) = 18z - 6z^2 + \frac{3}{40} z^5 + C_1$

$EI \cdot v(z) = 9z^2 - 2z^3 + \frac{1}{80} z^6 + C_1 z + C_2$

Z warunków brzegowych: $C_1 = C_2 = 0$

$$v(z) = \frac{9}{10000} z^2 - \frac{2}{10000} z^3 + \frac{1}{800000} z^6 \ [m]$$

$v_{max} = v(z = 2) = \frac{9}{10000} 2^2 - \frac{2}{10000} 2^3 + \frac{1}{800000} 2^6 = 0.00208m = 2.08mm$

Wnioski

Wielkość ugięcia maksymalnego zależy od faktycznej wielkości obciążenia (jego wypadkowej), ale w znacznym stopniu również od charakteru obciążenia. Im większe jest ramię siły wypadkowej względem utwierdzenia (a więc większa wartość momentu utwierdzenia), tym większych ugięć doznaje koniec belki.