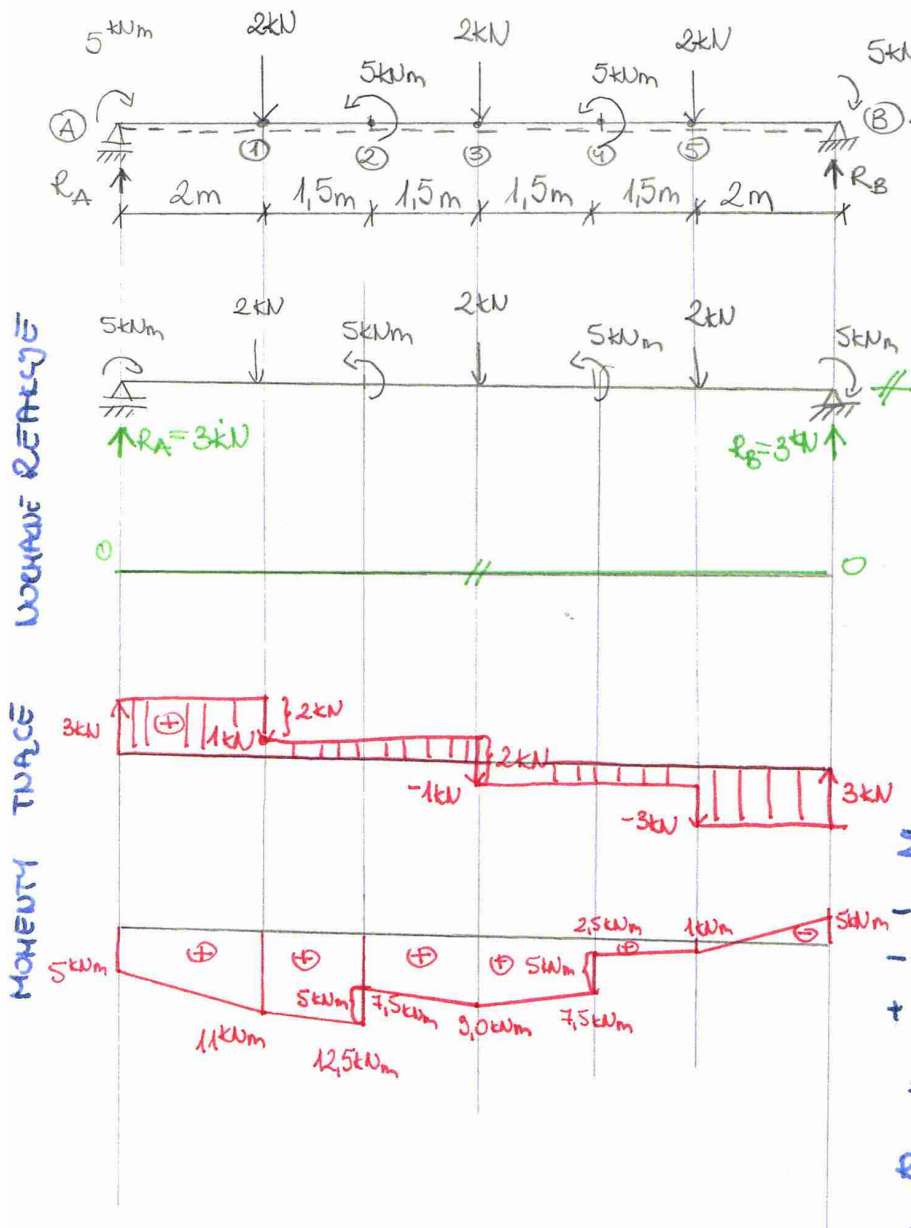


BELKI PROSTE - ZADANIA

ZADANIE 1

Dla danej belki wyznaczyć wykres momentów zginających oraz sił tnących i normalnych.



① Wyznaczenie reakcji podporowych.

Korzystając z warunku "zerowania" się momentów zginających w podpórach możemy zapisać

$$a) \sum M_A = 0$$

$$b) \sum M_B = 0$$

rozwijając równanie a)

$$\sum M_A = +5 \text{ kNm} + 2 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 5 \text{ kNm} + 2 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m} + 1.5 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) - 5 \text{ kNm} + 2 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m} + 1.5 \text{ m} + 1.5 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) + 5 \text{ kNm} - R_B \cdot (2 \text{ m} + 4 \cdot 1.5 \text{ m} + 2 \text{ m}) = 0$$

po przekształceniu równania

$$R_B \cdot 10 \text{ m} = 30 \text{ kNm}$$

$$R_B = \frac{30 \text{ kNm}}{10 \text{ m}} = \underline{\underline{3 \text{ kN}}}$$

rozwijając równanie b) otrzymamy natomiast reakcję R_A

$$\sum M_B = R_A \cdot 10 \text{ m} + 5 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot (4 \cdot 1.5 \text{ m} + 2 \text{ m}) - 5 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot (1.5 \text{ m} + 1.5 \text{ m} + 2 \text{ m}) - 5 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 5 \text{ kNm} = 0$$

$$R_A \cdot 10 \text{ m} = 30 \text{ kNm}$$

$$R_A = \frac{30 \text{ kNm}}{10 \text{ m}} = \underline{\underline{3 \text{ kN}}}$$

Z sumy sił na oś poziomą widzimy, że belka nie jest obciążona żadną siłą działającą poziomo więc $\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0 \text{ kN}$ ①

Kontrola poprawności obliczeń

- 1° Sprawdzenie sumy sił działających w pionie
zeby belka znajdowała się w równowadze
suma tych sił powinna być równa zero.

$$\Sigma R = 0$$

(↑) - siła działająca w górę

(↓) - siła działająca w dół

$$R_A (\uparrow) - 2kN (\downarrow) - 2kN (\downarrow) - 2kN (\downarrow) + R_B (\uparrow) = 0$$

$$R_A + R_B - 6kN = 0$$

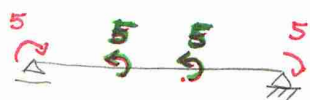
podstawiając za $R_A = 3kN$ i $R_B = 3kN$

$$3 + 3 - 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

równanie spełnione

- 2° Belkę tę można oszacować także w inny sposób.

Mozemy zauważyć, że momenty zginające przyłożone do belki równowazą się



Momenty zewnętrzne „obracają”
nam belkę zgodnie ze wskazówkami
zegara i ich suma wynosi 10 kNm

Momenty przyłożone zaś w środku belki próbujś
obrócić ją przeciwnie do wskazówek zegara.

Ich suma również wynosi 10 kNm

Zakładając, że momenty kręcące w prawo są dodatnie
zaś te kręcące w lewo ujemne możemy zauważyć
że w równaniach na sumę momentów względem
podpór A i B ich wzajemny wpływ się zniesie
można więc pominąć ich wpływ przy wyznaczaniu
reakcji podporowych. Należy jednak pamiętać, że
jest to przypadek wyjątkowy i nie zawsze możliwa
jest taka redukcja. NIE NIGDY JEJ NIE MOŻEMY
TYCH MOMENTÓW PRZY SPORZĄDZANIU MAKSYMALNYCH MOMENTÓW
ZGINAJĄCYCH!!!

2) WYKRES SIŁ NORMALNYCH

Ponieważ wartość sił normalnych na kierunku poziomym wynosi zero wykres sprowadza się do linii prostej o wartości 0 na całej długości belki.

3) WYKRES SIŁ TĄCZYCH - KONSTRUKCJA

Zaczynamy od lewej strony belki.

Reakcja $R_A = 3\text{kN}$ „podnosi” nam wykres o jej wartość.

Następnie, aż do siły 2kN nie nie wpływają na siły tnące. Siła 2kN działająca w dół obniża nam wartość na wykresie sił tnących o jej wartość 2kN . Czyli wykres znajduje się na poziomie $3\text{kN} - 2\text{kN} = 1\text{kN}$.

Dokładnie to samo dzieje się w przypadku następnej pionowej siły 2kN . Od bieżącej wartości siły na wykresie 1kN odejmujemy 2kN w wyniku czego otrzymujemy -1kN .

W taki sam sposób uwzględniamy ostatnią siłę $(-1\text{kN} - 2\text{kN} = -3\text{kN})$. Gdy dochodzimy do podporu wykres ma wartość -3kN . Natomiast reakcja podporowa $R_B = 3\text{kN}$ znowu „podnosi” go do góry. W wyniku czego otrzymujemy $-3\text{kN} + 3\text{kN} = 0\text{kN}$.

Jak widać wykres ma stoki tylko w miejscach przyłożenia do belki sił skupionych.

4) WYKRES MOMENTÓW ZCIĄGAJĄCYCH

Wykres zostanie stworzony na podstawie wyznaczenia wartości sił w punktach przyłożenia obciążenia do belki (1) (2) (3) (4) (5) oraz w podporach.

W miejscu reakcji podporowej ①

Ponieważ mamy do czynienia z podporami przegubowymi moment w podporze A będzie równy tylko momentowi przyłożonemu do belki w tym miejscu (5 kNm) - dodatni (rozciągająca spody)

W punkcie ①

Do momentu podporowego dochodzi moment od reakcji w podporze A na ramieniu 2m. Moment ten również rozciągająca spody więc jest dodatni.

$$M_{①} = 5 \text{ kNm} + 3 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 11 \text{ kNm}$$

Wykres pomiędzy punktami A i 1 jest liniowy !!!

W punkcie ②

Do momentu w punkcie ① należy doliczyć moment od siły 2 kN (przyłożonej w punkcie ①) na ramieniu 1,5m. Należy także uwzględnić zmianę długości ramienia siły podporowej.

$$M_{②} = 3 \text{ kN} (2 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) + 5 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} = 12,5 \text{ kNm}$$

Siła 2 kN występuje ze znakiem ujemnym ponieważ moment nią wywołany w punkcie ② ściska spody.

Z uwagi na to, że w punkcie ② przyłożony jest skupiony moment zginający, to przed podporą z lewej strony nie uwzględniamy jego działania natomiast tuż za podporą musimy uwzględnić jego wpływ.

Wynika z tego, że po lewej stronie punktu ② mamy wartość momentu wynoszącą $M_{②}^L = 12,5 \text{ kNm}$ zaś po prawej stronie wartość ta ulega zmniejszeniu o przyłożony moment 5 kNm (ujemny - ściska spody).

Więc moment z prawej strony $M_{②}^P = M_{②}^L - 5 \text{ kNm} = 12,5 - 5 = 7,5 \text{ kNm}$. ④

Generując to składe momentu w punkcie ② z lewej strony punktu ②

W punkcie (3)

Do momentu nie dochodzą żadne nowe wartości sił zewnętrznych. Zmieniają się jednak ramiona sił, z którymi mieliśmy do czynienia w punkcie (2).

$$M_3 = 3kN \cdot (2m + 1,5m + 1,5m) + 5kNm - 2kN \cdot (1,5m + 1,5m) - 5kNm = 9kNm$$

Ponieważ, w punkcie tym nie występuje moment skupiony wykres nie będzie miał skoków.

W punkcie (4)

Podobnie jak w punkcie (2) z uwagi na przysiężny moment punkt ten będziemy rozpatrywać w przekroju z lewej jego strony i z prawej.

W przekroju z lewej strony (bez uwzględnienia momentu skupionego)

$$M_4^L = 3kN \cdot (2m + 1,5m + 1,5m + 1,5m) + 5kNm - 2kN \cdot (1,5m + 1,5m + 1,5m) - 5kNm - 2kN \cdot 1,5m = 7,5kNm$$

W przekroju z prawej strony - uwzględniamy moment skupiony $5kNm$ (ujemny - ściska spręży)

$$M_4^P = M_4^L - 5kNm = 7,5kNm - 5kNm = 2,5kNm$$

W punkcie (5)

Nie dochodzą żadne nowe obciążenia zewnętrzne. Następuje zmiana ramion sił.

$$M_5 = 3kN \cdot (2 + 4 \cdot 1,5m) + 5kNm - 2kN \cdot (4 \cdot 1,5m) - 5kNm - 2kN \cdot (2 - 1,5m) + - 5kNm = 1kNm$$

W podporze (B)

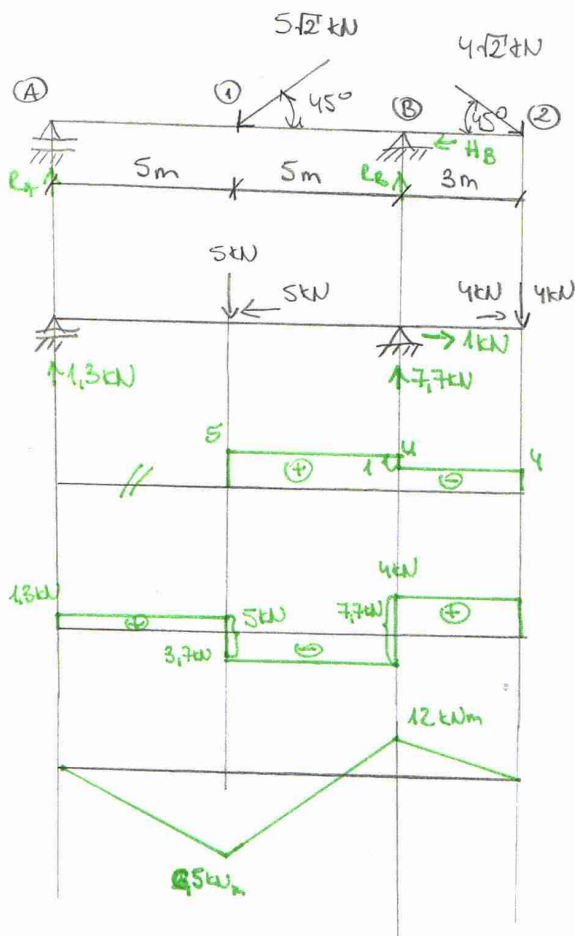
Sumujemy momenty od wszystkich sił, reakcji po lewej stronie belki

$$M_B = 3kN \cdot (2 \cdot 2m + 4 \cdot 1,5m) + 5kNm - 2kNm(2m + 4 \cdot 1,5m) - 5kNm - 2kN \cdot (2 - 1,5m + 2m) - 5kNm - 2kN \cdot 2m - 5kNm = \text{momentów przysiężnych do podpory (B)}$$

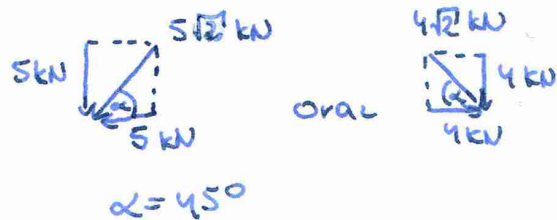
ZADANIE 2

Dla danej belki wyznaczyć wykres sił tnących, normalnych oraz wykres momentów.

WYKRESY SIŁ TĄCĄCYCH I NORMALNYCH



W celu wyznaczenia reakcji podporowych oraz wykresów sił działających pod kątem 45° rozbijamy na $\perp$ oraz $\parallel$ do osi belki.



W wyniku tego otrzymujemy układ sił poziomych oraz pionowych, na podstawie którego wyznaczamy reakcje.

① Wyznaczenie reakcji.

Z sumy momentów w podporze (A) otrzymujemy

$$\sum M_A = 5kN \cdot 5m - R_B \cdot 10m + 4kN \cdot 13m = 0$$

$$R_B = 7.7kN$$

A z sumy w podporze (B):

$$\sum M_B = -5kN \cdot 5m + R_A \cdot 10m + 4kN \cdot 3m = 0$$

$$10m R_A = -13kNm \Rightarrow R_A = 1.3kN$$

opr. suma sił na kierunku pionowym powinna być $= 0$

$$7.7 + 1.3 - 5 - 4 = 0$$

$0 = 0$ warunek spełniony.

Wyznaczenie reakcji poziomej H_B z ruchu sił na oś poziomą.



$$\sum H = 0 \Rightarrow 5kN + H_B - 4kN = 0 \quad H_B = -1kN$$

② Wykres sił normalnych.

Ponieważ podpora A jest podporą przesuwną nie oddała

④-① nie występują siły normalne

Popiero w punkcie ① pojawia się siła o wartości 5 kN rozciągająca przekrój położony na prawo od niej więc dodatnia.

w punkcie ① pojawia się ujemne reakcje podporowe redukujące siłę poziomą o 1 kN czyli do wartości 4 kN

③ Wykres sił tnących.

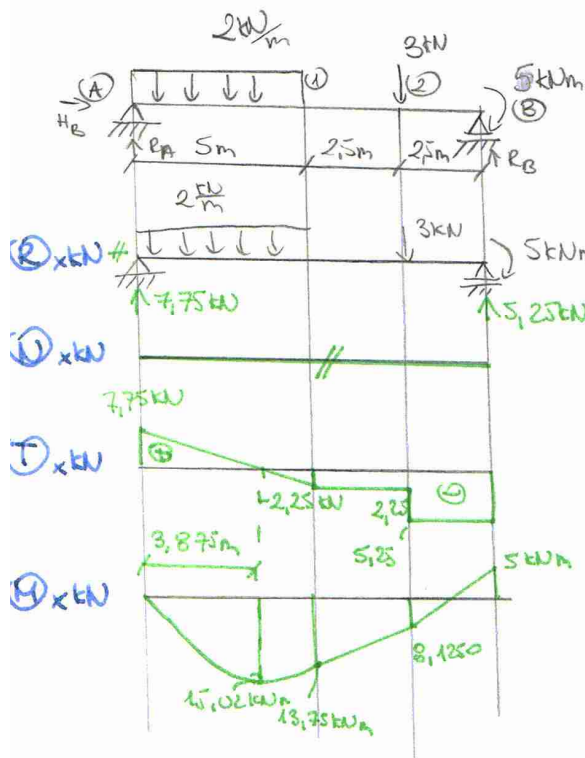
Uwzględniamy tylko siły pionowe !!!

④ Wykres momentów.

Uwzględniamy tylko siły pionowe! Siły poziome działają w osi belki więc ramy ich działanie jest $= 0$ co daje moment $= 0$

ZADANIE 3

Dla danej belki wyznaczyć wskaźniki tęgocde normalnych oraz wykres momentów



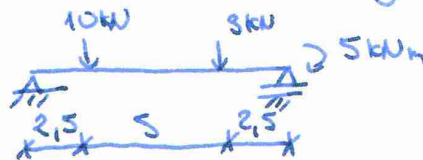
1 Wyznaczenie reakcji

Obciążenie równomiernie rozłożone wyrażone w $\frac{kN}{m}$ musimy sprowadzić do obc. wyrażonego w kN (cała skupiona). Dokonuje się to poprzez pomnożenie wartości obciążenia razy długości jego występowania



W przypadku naszej belki się ta wylicza

$$P = q \cdot L = 2 \frac{kN}{m} \cdot 5m = 10kN$$



Dla takiego układu wyznaczamy reakcje podporowe z sumy momentów względem podpory (A) i (B)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 10kN \cdot 2,5m + 3kN \cdot 7,5m + 5kNm - R_B \cdot 10m = 0$$

$$R_B \cdot 10m = 52,5kNm \Rightarrow R_B = 5,25kN$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 10kN \cdot 7,5m + 3kN \cdot 2,5m - 5kNm - R_A \cdot 10m = 0$$

$$R_A \cdot 10m = 77,5kNm \Rightarrow R_A = 7,75kN$$

spr. suma sił na kierunku pionowym powinna być = 0

$$7,75 - 10 - 3 + 5,25 = 0$$

0=0 spełnione

Ponieważ nie występują żadne siły poziome z sumy tych sił otrzymujemy $\sum H = 0$ $H_B = 0kN$

② Wykres sił normalnych.

Brak sił na kierunku poziomym.

③ Wykres sił tnących.

W punkcie (A) wartości reakcji. W punkcie (1) wartości która jest sumą reakcji z podporą oraz wyznaczony wewnętrzny siły od obciążenia ciągłego. Wyc

$$R_{(1)} = 7,75 \text{ kN} - \underbrace{10 \text{ kN}}_{5 \text{ m} \cdot 2 \text{ kN}} = -2,25 \text{ kN}$$

Wykres jest natomiast funkcją liniową, ponieważ obciążenie jest ciągłe w przedziale (A)-(1).

W kolejnych przedziałach z uwagi na brak obciążenia wykres będzie prosty!

W punkcie (2) wartości siły tnącej jak w punkcie (1) (Brak sił w przedziale (1)-(2)) W punkcie (2) skok siły o wartości siły skupionej 3 kN i stała wartość aż do podpor.

④ Wykres momentów

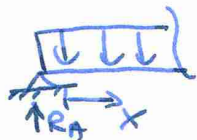
W podporze (A) wartości 0 (pneum, brak momentu skupionego).

W punkcie (1) wartości momentu możemy obliczyć korzystając z tego, że obc. rozłożone zamieniliśmy na siły skupione. Pamiętaj jednak należy, że od obciążenie prostokątnego równomiernie rozłożonego wykres jest parabolą, której kształt przypominać może myślowe ugięcie belki od tego obciążenia


$$M_{(1)} = 7,75 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} = 13,75 \text{ kNm}$$

Wartość tego obciążenia możemy także otrzymać zapisując równanie

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$



gdzie R_A - reakcja podpora

x - ramię cięcia w przekroju

q - obc. równomiernie rozłożone

Aby otrzymać ekstremum momentu musimy znaleźć punkt zerowania się sił tnących, gdyż to dla niego momenty osiągną wartości ekstremalne.

$$T(x) = R_A - q \cdot x$$

$$T(x) = 7,75 - 2 \cdot x$$

gdy $T(x) = 0$ mamy ekstremalne momenty. Wtedy szukamy x dla którego możemy je wyznaczyć

$$7,75 - 2x = 0$$

$$x = 3,875 \text{ m}$$

a następnie podstawiając do równania na moment

$$M(x) = 7,75 \cdot 3,875 - \frac{2 \cdot 3,875^2}{2} = 15,02 \text{ kNm}$$

otrzymujemy ekstremalne wartości momentu.