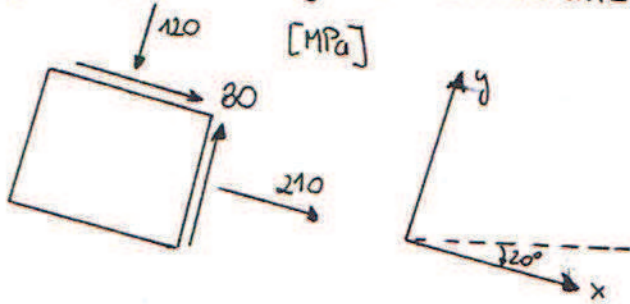


Wytrzymałość Materiałów - TUTORIAL 1

Zadanie (PSN)

Wyznaczyć naprężenia główne i ich kierunki dla następującego stanu naprężeń:



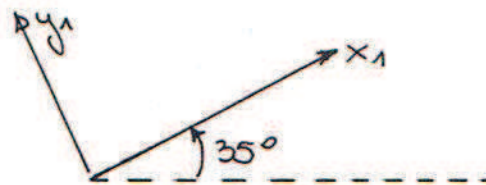
$$\sigma_x = 210 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_y = -120 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 80 \text{ [MPa]}$$

Stworzyć konstrukcję koła Mohra

Następnie wyznaczyć składowe tego stanu dla elementu zorientowanego w następującym układzie $x_1 y_1$:



Wyznaczyć naprężenia główne i ich kierunki dla stanu naprężeń elementu zorientowanego w układzie $x_1 y_1$.

Stworzyć konstrukcję koła Mohra.

Rozwiązanie:

1) Naprężenia główne:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{210 - 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{210 + 120}{2}\right)^2 + 80^2} = 45 \pm 183,4 \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_1 = 228,4 \text{ [MPa]} \\ \sigma_2 = -138,4 \text{ [MPa]} \end{matrix}$$

$$\text{Spr: } \sigma_x + \sigma_y = 90 \text{ [MPa]} = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{w}$$

2) Kierunki główne:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 80}{210 + 120} = \frac{160}{330} \Rightarrow 2\varphi_0 = 25^\circ 52'$$

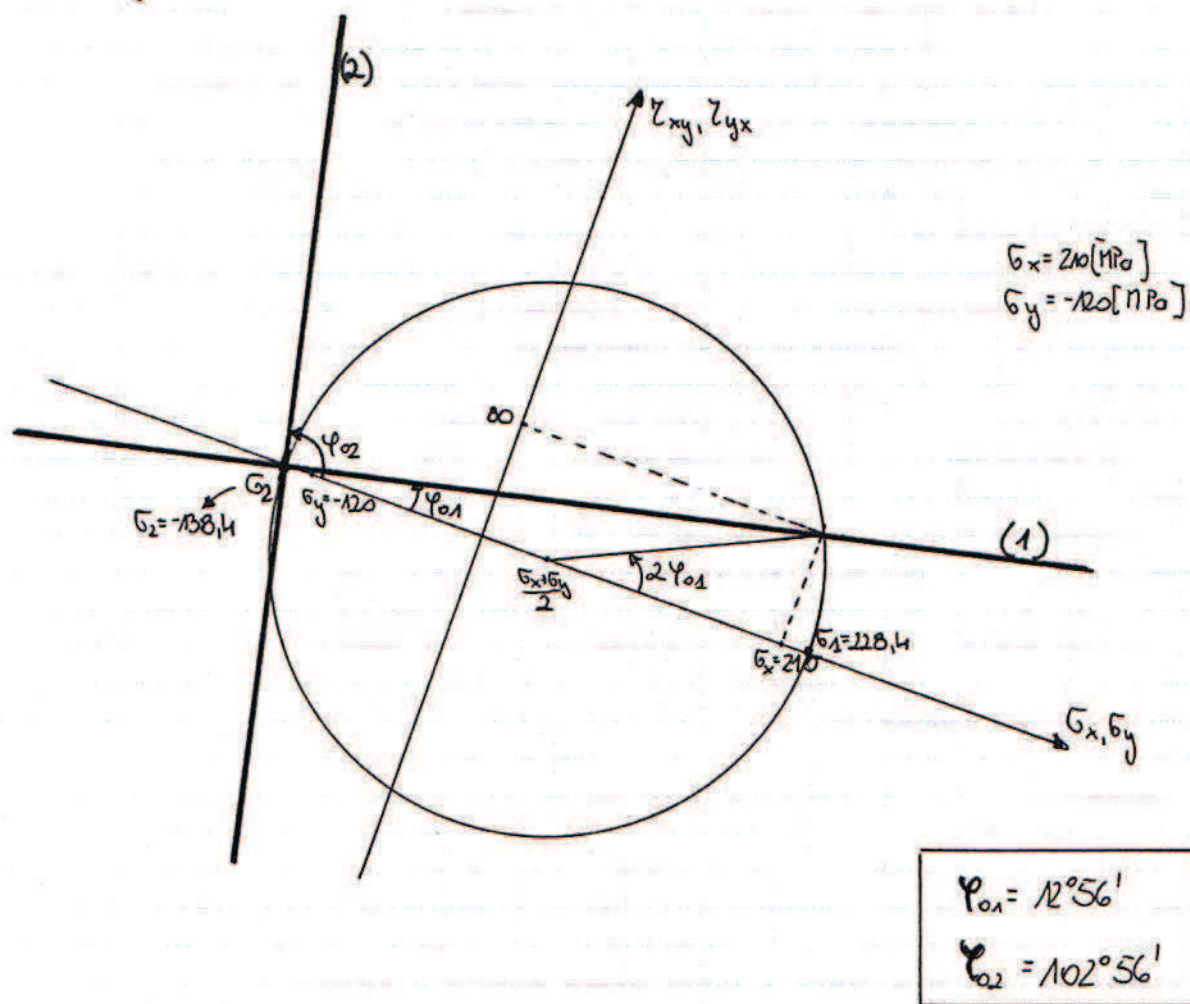
$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi_0 > 0 \Rightarrow 2\varphi_{01} = 25^\circ 52'$$

$$\boxed{\varphi_{01} = 12^\circ 56'}$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + 90^\circ$$

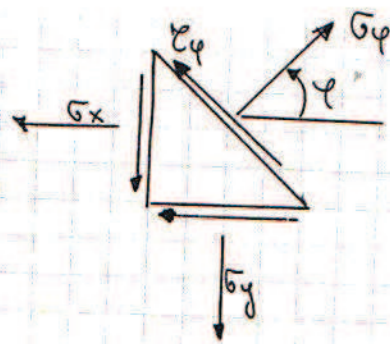
$$\boxed{\varphi_{02} = 102^\circ 56'}$$

3) Konstrukcija kota Mohra:



$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

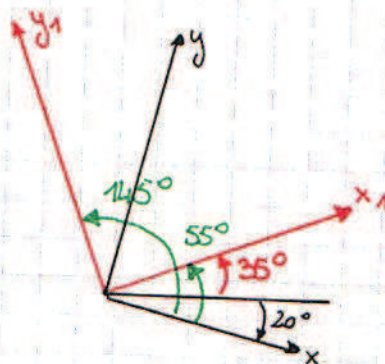
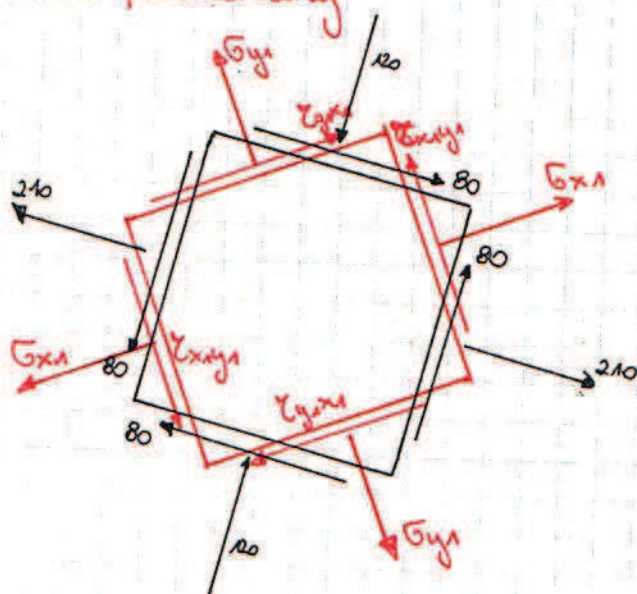
$$\tau_{\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



4) Interpretacja geometryczna (stan x_1, y_1):

— stan wyjściowy

— stan poszukiwany



5) Naprężenia w kierunkach x_1, y_1 :

$$\sigma_{x_1} = \sigma(\varphi = 55^\circ) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{x_1} = \frac{210 - 120}{2} + \frac{330}{2} \cos 110^\circ + 80 \cdot \sin 110^\circ = 63,7 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \tau(\varphi = 55^\circ) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{330}{2} \sin 110^\circ + 80 \cdot \cos 110^\circ = -182,4 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{y_1} = \sigma(\varphi = 145^\circ) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{210 - 120}{2} + \frac{330}{2} \cos 290^\circ + 80 \sin 290^\circ = 26,3 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{y_1 x_1} = -\tau(\varphi = 145^\circ) = -\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi\right)$$

$$\tau_{y_1 x_1} = -\left(-\frac{330}{2} \sin 290^\circ + 80 \cos 290^\circ\right) = -182,4 \text{ [MPa]}$$

$$\text{Spr: } \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = 90 \text{ [MPa]} \quad \text{w}$$

6) Naprężenia główne (x_1, y_1):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}}{2}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{63,7 + 26,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{63,7 - 26,3}{2}\right)^2 + 182,4^2} = 45 \pm 183,4 \Rightarrow$$

$\sigma_1 = 228,4 \text{ [MPa]}$

$\sigma_2 = -138,4 \text{ [MPa]}$

7) Kierunki główne (x_1, y_1):

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{x_1 y_1}}{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}} = \frac{-364,8}{37,4} \Rightarrow 2\varphi_0 = -84^\circ 08'$$

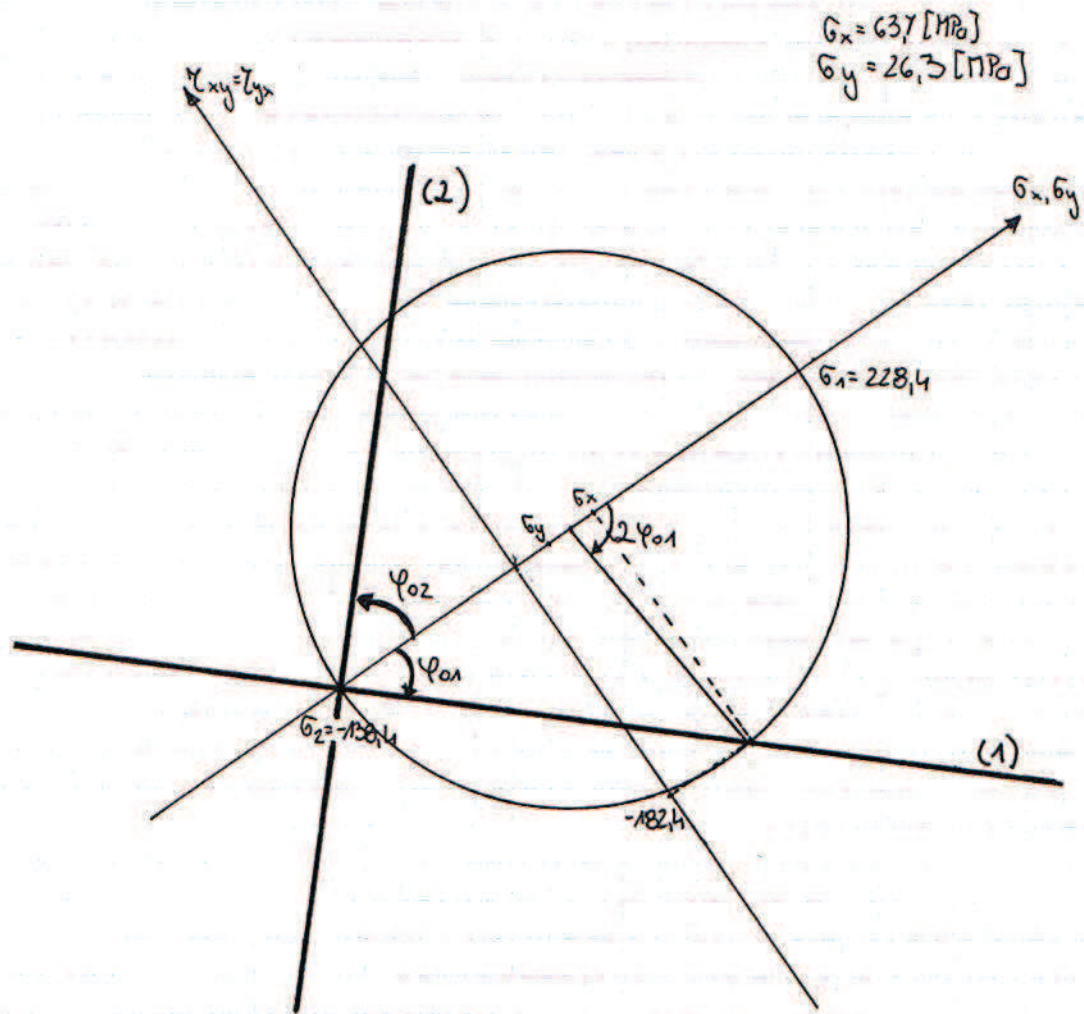
$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{+} \cos 2\varphi_0 > 0 \Rightarrow 2\varphi_{01} = -84^\circ 08'$$

$\varphi_{01} = -42^\circ 04'$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + 90^\circ$$

$\varphi_{02} = 47^\circ 56'$

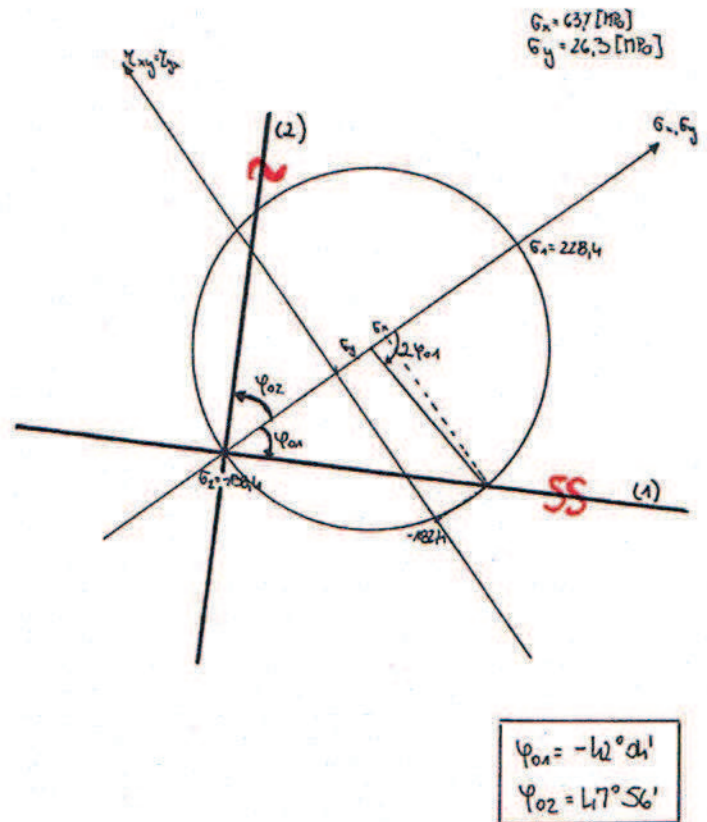
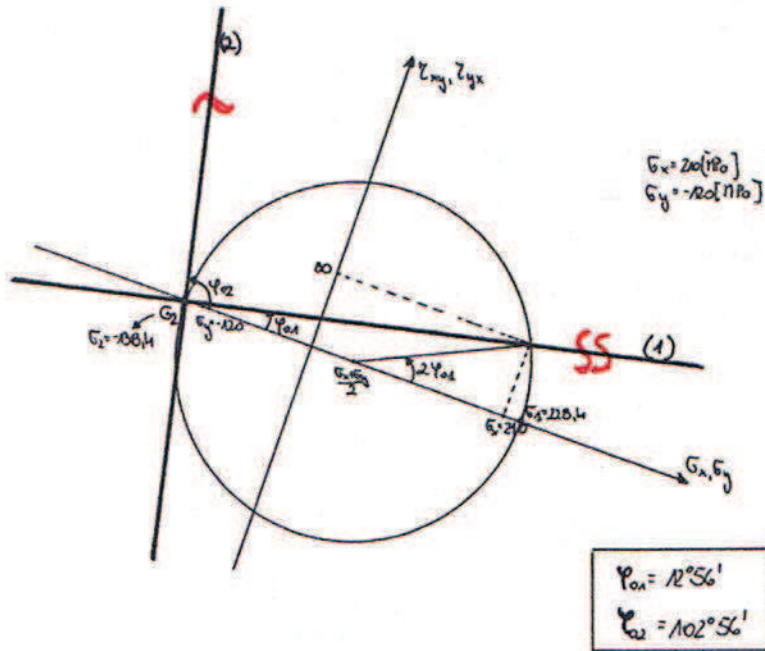
8) Konstrukcija kota Mohra:



$$\phi_{01} = -12^\circ 41'$$

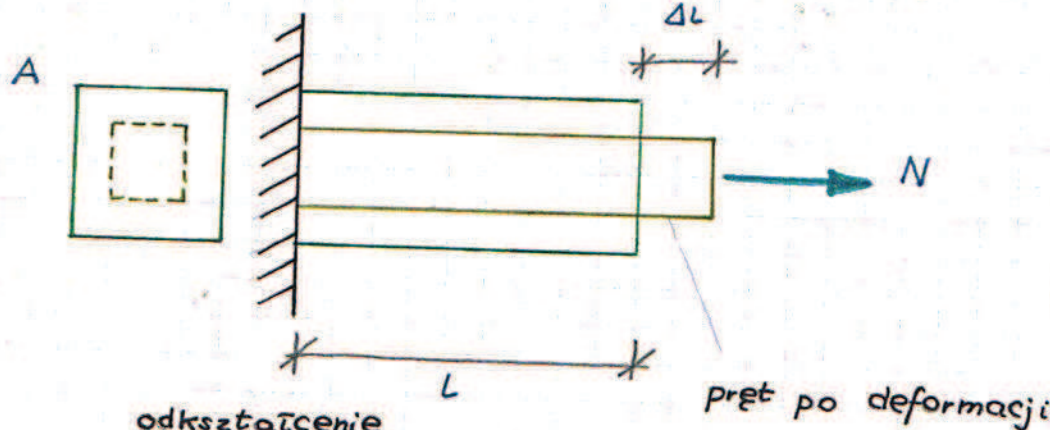
$$\phi_{02} = 17^\circ 56'$$

9) Zestawienie konstrukcji koła Mohra (równoległość kierunków głównych potwierdzająca jednoznaczność rozwiązania zagadnienia)



ODKSZTAŁCENIA

str. 1.

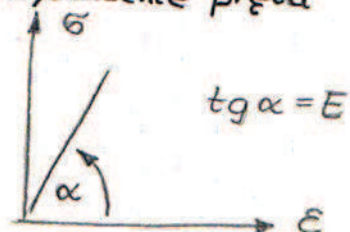


N - siła normalna

A - pole przekroju

L - długość pręta

ΔL - wydłużenie pręta



odkształcenie

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad [-]$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (\text{naprężenie normalne})$$

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad (\text{odkształcenie normalne})$$

Płaski stan odkształcenia

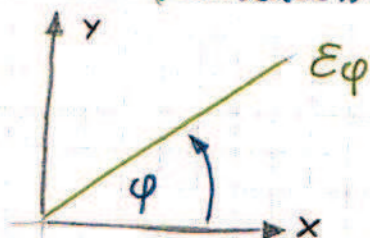
odkształcenia :

- podłużne - ϵ_x, ϵ_y

- postaciowe - γ_{xy}

tensometr - mierzy odkształcenie podłużne,

Wyznaczenie odkształcenia podłużnego w dowolnym kierunku (zorientowany pod kątem φ)



$$\epsilon_{\varphi} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Odkształcenia główne i ich kierunki

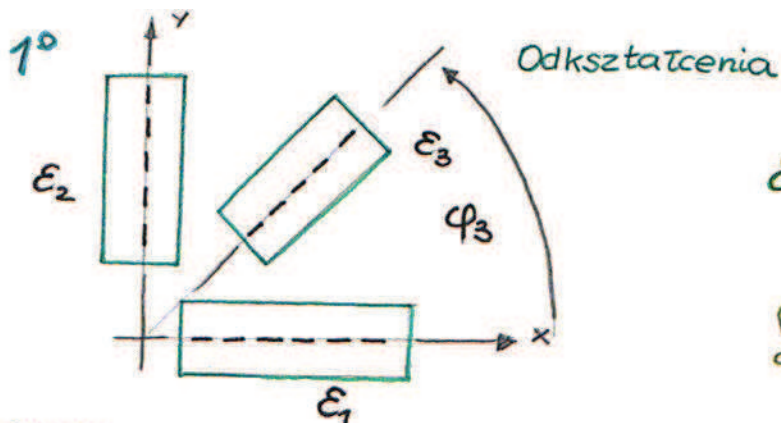
$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (\text{odkształcenia gł.})$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

(kierunki gł.)

$$(\epsilon_x - \epsilon_y) \cdot \cos 2\varphi_{01} > 0 \Rightarrow \varphi_{01}$$

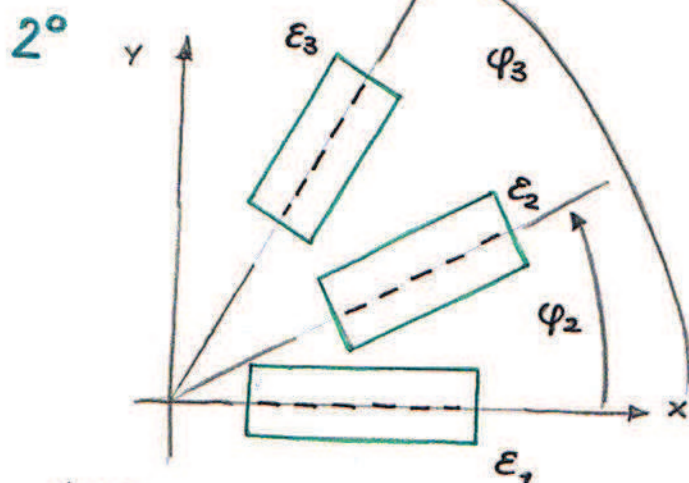
$$(\epsilon_x - \epsilon_y) \cdot \cos 2\varphi_{02} < 0 \Rightarrow \varphi_{02}$$



dane: $\varphi_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

rozwiązanie:

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \varepsilon_3 \text{ dla } \varphi_3 \rightarrow \text{niewiadoma } \gamma_{xy} \text{ (równanie z jedną niewiadomą)} \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_y \end{cases}$$

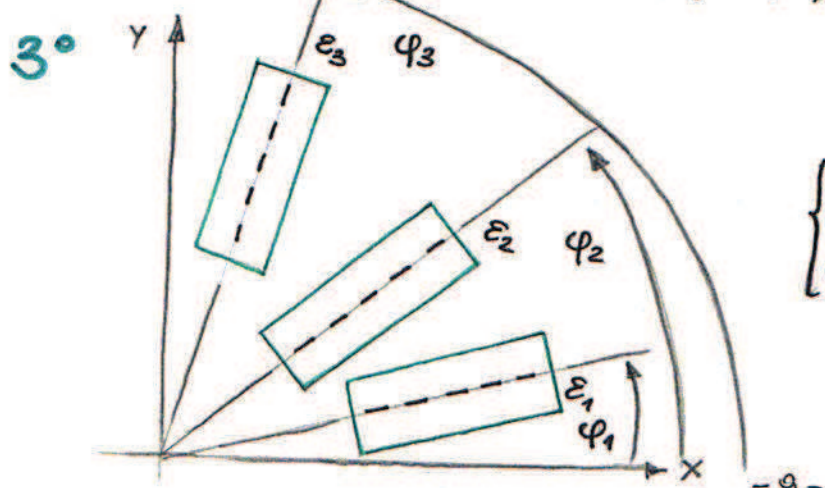


dane: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varphi_2, \varphi_3$

niewiadome: $\gamma_{xy}, \varepsilon_y$

rozwiązanie:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon_2 \text{ dla } \varphi_2 \text{ niewiadome: } \gamma_{xy}, \varepsilon_y \\ \varepsilon_{\varphi_3} = \varepsilon_3 \text{ dla } \varphi_3 \text{ niewiadome: } \gamma_{xy}, \varepsilon_y \end{cases} \text{ układ równań - dwie niewiadome,}$$



dane: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_1 \text{ dla } \varphi_1 \\ \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon_2 \text{ dla } \varphi_2 \\ \varepsilon_{\varphi_3} = \varepsilon_3 \text{ dla } \varphi_3 \end{cases} \text{ - układ trzech równań z trzema niewiadomymi: } \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$$

Wyznaczyć odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

korzystamy z wzoru:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

!



tensometr - mierzy odkształcenie podłużne (ε) w kierunku 1°