Ilorazy różnicowe

Definicja ilorazu różnicowego jest następująca:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

czyli mamy:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

zatem kolejny iloraz różnicowy ma postać:

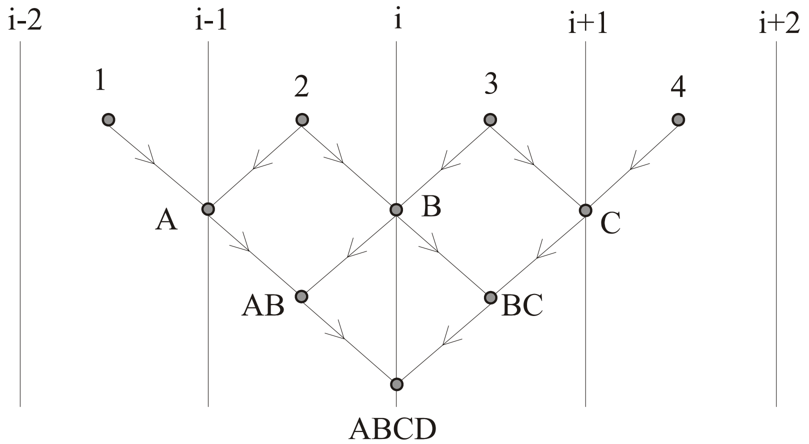
$$f_i'' = \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i - f_i - f_{i-1}}{h^2} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Trzeci iloraz to:

$$f_i''' = \frac{\frac{\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h} - \frac{f_{i+1} - f_i}{h}}{h} - \frac{\frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h}}{h}}{2h} = \frac{f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i - f_i + f_{i-1} + f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} =$$

$$= \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$

Żeby pokazać iloraz czwartego rzędu pomogę sobie rysunkiem:



Rys.1

Kazdy z punktów odpowiada kolejnym ilorazom różnicowym i tak:

$$1 = \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h}$$

$$2 = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

$$3 = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$4 = \frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h}$$

Następnie:

$$\mathrm{A} = \frac{2-1}{h} = \frac{\frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h}}{h}$$

$$\mathrm{B} = \frac{3-2}{h} = \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}{h}$$

$$\mathrm{C} = \frac{4-3}{h} = \frac{\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h} - \frac{f_{i+1} - f_i}{h}}{h}$$

Dalej mamy:

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i - f_i + f_{i-1} - f_i + f_{i-1} + f_{i-1} - f_{i-2}}{h^3} = \frac{f_{i+1} - 3f_i + 3f_{i-1} - f_{i-2}}{h^3}$$

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}}{h} = \frac{f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i - f_{i+1} + f_i + f_i - f_{i-1}}{h^3} = \frac{f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}}{h^3}$$

Zatem mamy ze iloraz różnicowy czwartego stopnia wygląda następująco:

$$\mathrm{ABCD} = f'''' = \frac{\mathrm{BC}-\mathrm{AB}}{\mathrm{h}} = \frac{f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1} - f_{i+1} + 3f_i - 3f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} =$$

$$= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4}$$

Opracował: Przemek Wąż