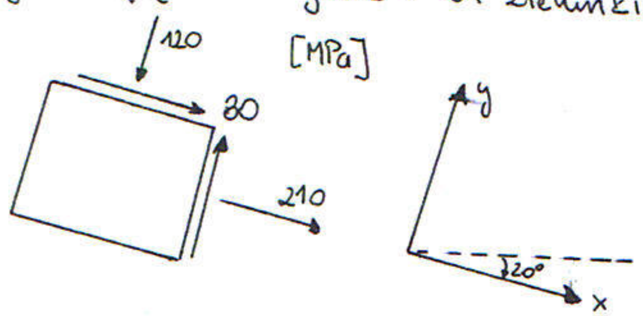
Wytrzymałość Materiałów - TUTORIAL 1

Zadanie (PSN)

Wyznaczyć naprężenia główne i ich kierunki dla następującego stanu naprężeń:

[MPa]



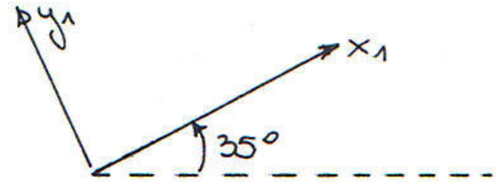
$\sigma_x = 210$ [MPa]

$\sigma_y = -120$ [MPa]

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 80$ [MPa]

Stworzyć konstrukcję koła Mohra

Następnie wyznaczyć składowe tego stanu dla elementu zorientowanego w następującym układzie $x_1 y_1$:



Wyznaczyć naprężenia główne i ich kierunki dla stanu naprężeń elementu zorientowanego w układzie $x_1 y_1$.
Stworzyć konstrukcję koła Mohra.

Rozwiązanie:

1) Naprężenia główne:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{210-120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{210+120}{2}\right)^2 + 80^2} = 45 \pm 183{,}4 \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 228{,}4\,[MPa]} \quad \boxed{\sigma_2 = -138{,}4\,[MPa]}$$

Spr: $\sigma_x + \sigma_y = 90\,[MPa] = \sigma_1 + \sigma_2$ w

2) Kierunki główne:

$$tg\, 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 80}{210+120} = \frac{160}{333} \Rightarrow 2\varphi_0 = 25°52'$$

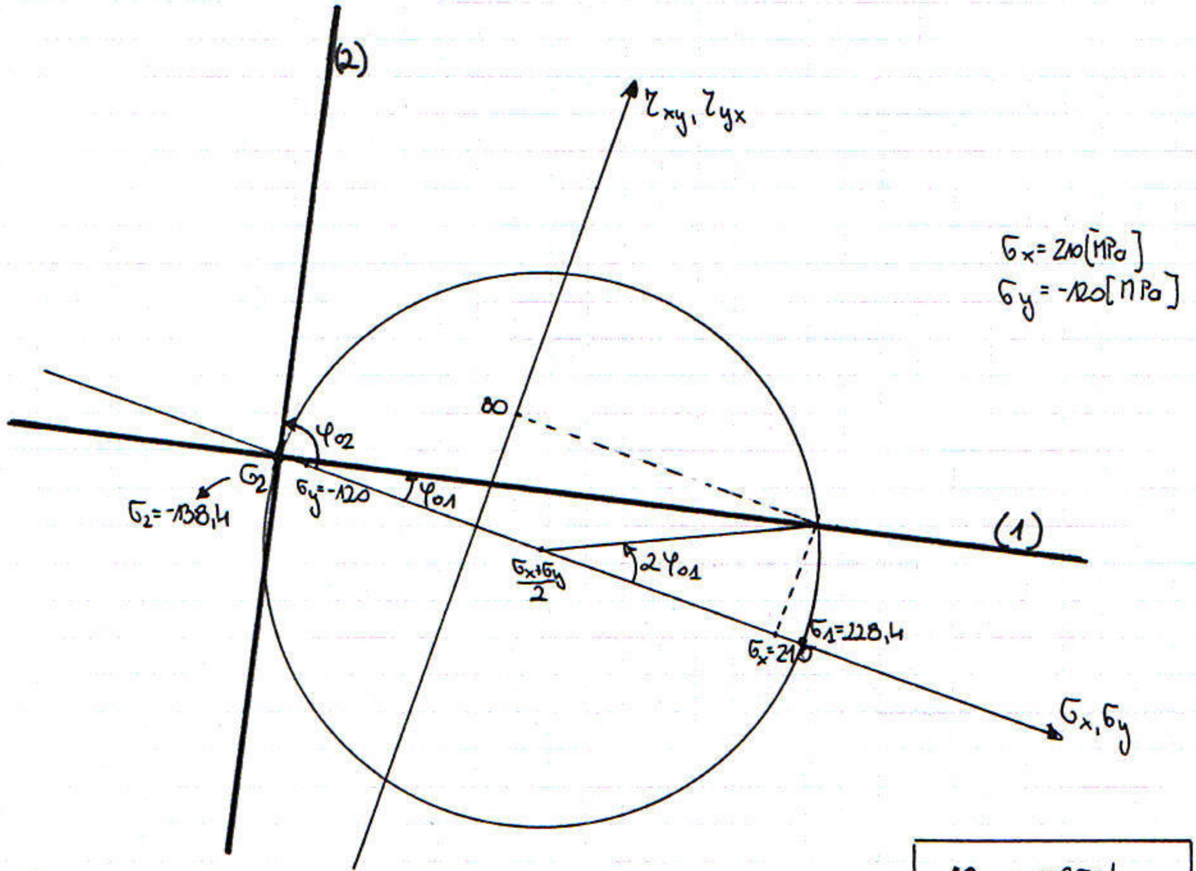
$$(\underset{+}{\sigma_x - \sigma_y}) \underset{+}{\cos 2\varphi_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi_{01} = 25°52'$$

$$\boxed{\varphi_{01} = 12°56'}$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + 90°$$

$$\boxed{\varphi_{02} = 102°56'}$$

3) Konstrukcja koła Mohra:

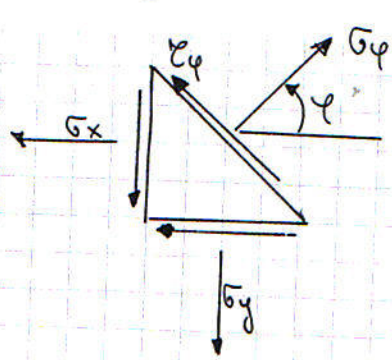


$$\varphi_{01} = 12°56'$$

$$\varphi_{02} = 102°56'$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\cdot\sin 2\varphi$$

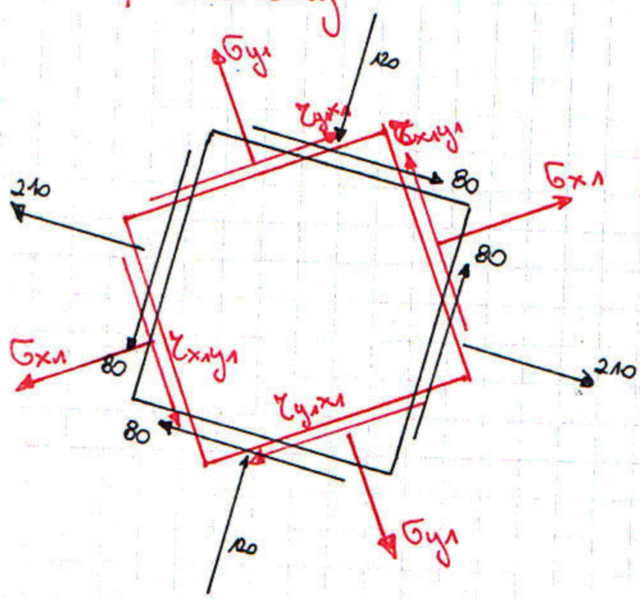
$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi$$

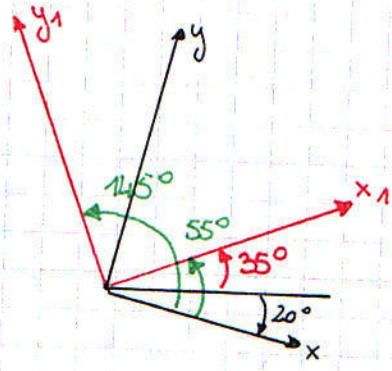


4) Interpretacja geometryczna (stan x_1, y_1):

— stan wyjściowy

— stan poszukiwany





5) Naprężenia w kierunkach x_1, y_1:

$$\sigma_{x_1} = \sigma(\varphi=55^\circ) = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{x_1} = \frac{210-120}{2} + \frac{330}{2}\cos 110^\circ + 80\cdot\sin 110^\circ = 63{,}7\ [\mathrm{MPa}]$$

$$\tau_{x_1y_1} = \tau(\varphi=55^\circ) = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{330}{2}\sin 110^\circ + 80\cdot\cos 110^\circ = -182{,}4\ [\mathrm{MPa}]$$

$$\sigma_{y1} = \sigma(\varphi = 145^\circ) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{y1} = \frac{210-120}{2} + \frac{330}{2}\cos 290^\circ + 80\sin 290^\circ = 26{,}3\ [MPa]$$

$$\tau_{y_1x_1} = -\tau(\varphi = 145^\circ) = -\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi\right)$$

$$\tau_{y_1x_1} = -\left(-\frac{330}{2}\sin 290^\circ + 80\cos 290^\circ\right) = -182{,}4\ [MPa]$$

Spr: $\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = 90\ [MPa]$ w

6) Naprężenia główne (x_1, y_1):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x1} + \sigma_{y1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x1} - \sigma_{y1}}{2}\right)^2 + \tau_{x_1y_1}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{63{,}7 + 26{,}3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{63{,}7 - 26{,}3}{2}\right)^2 + 182{,}4^2} = 45 \pm 183{,}4 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_1 = 228{,}4\ [MPa]}$$

$$\boxed{\sigma_2 = -138{,}4\ [MPa]}$$

7) Kierunki główne (x_1, y_1):

$$tg\, 2\varphi_o = \frac{2\tau_{x_1y_1}}{\sigma_{x1} - \sigma_{y1}} = \frac{-364{,}8}{37{,}4} \Rightarrow 2\varphi_o = -84^\circ 08'$$

$$\underset{+}{(\sigma_x - \sigma_y)}\ \underset{+}{\cos 2\varphi_o} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi_{o1} = -84^\circ 08'$$

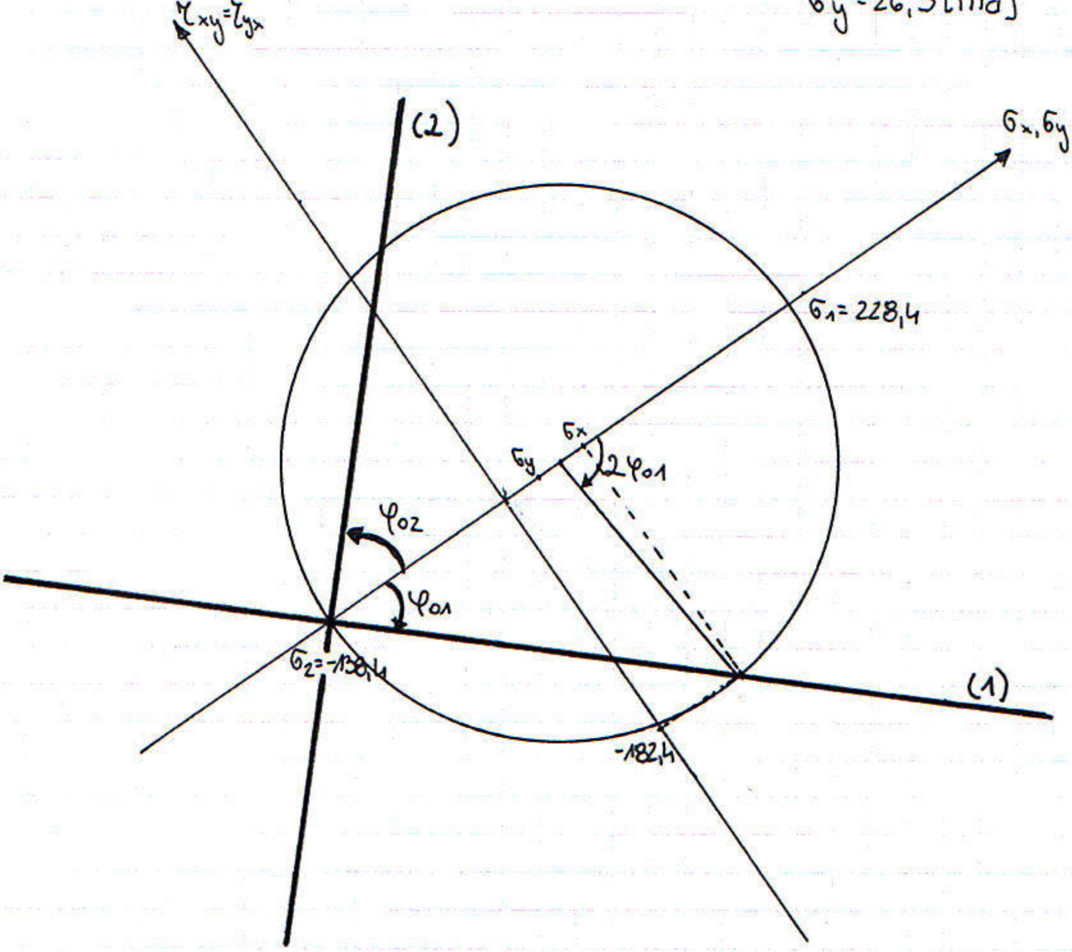
$$\boxed{\varphi_{o1} = -42^\circ 04'}$$

$$\varphi_{o2} = \varphi_{o1} + 90^\circ$$

$$\boxed{\varphi_{o2} = 47^\circ 56'}$$

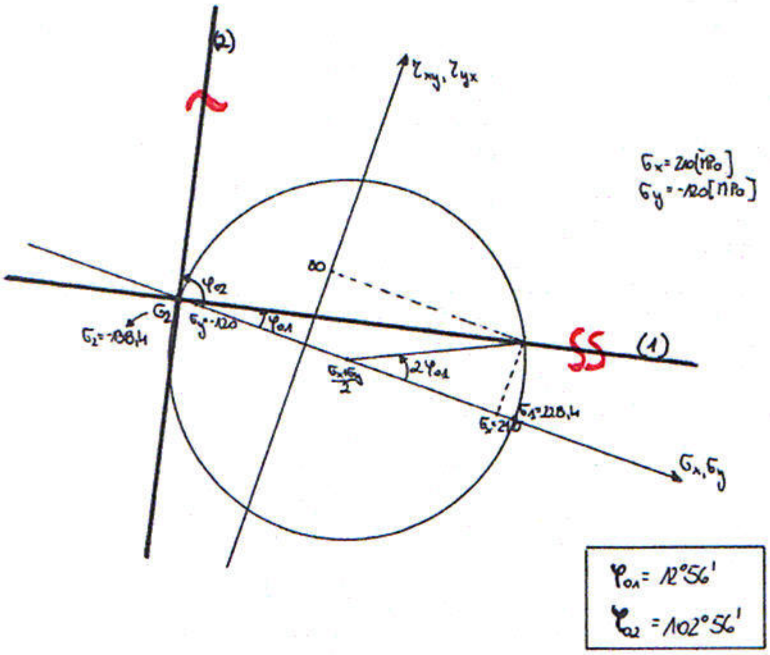
8) Konstrukcja koła Mohra:

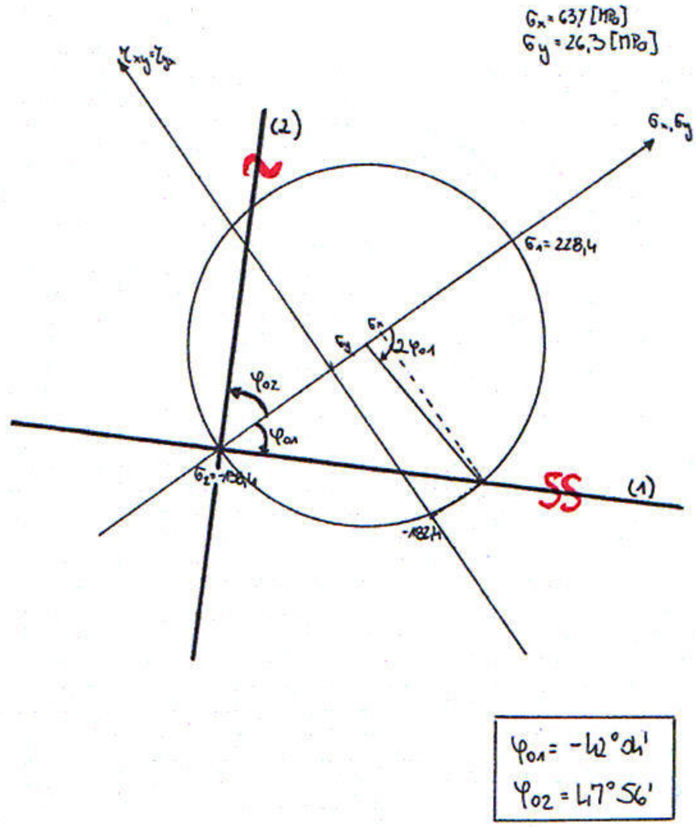
$\sigma_x = 63,7$ [MPa]
$\sigma_y = 26,3$ [MPa]



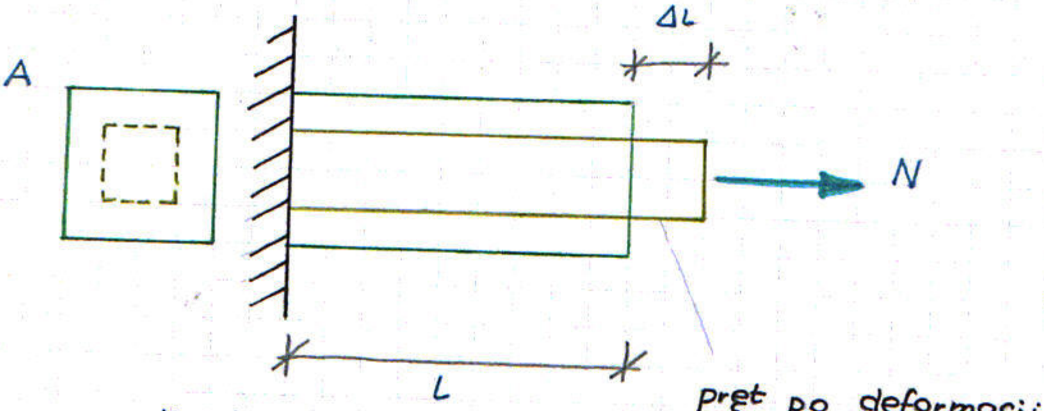
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{01} &= -42^\circ 04' \\ \varphi_{02} &= 47^\circ 56' \end{aligned}}$$

9) Zestawienie konstrukcji kół Mohra (równoległość kierunków głównych potwierdzająca jednoznaczność rozwiązania zagadnienia)





ODKSZTAŁCENIA

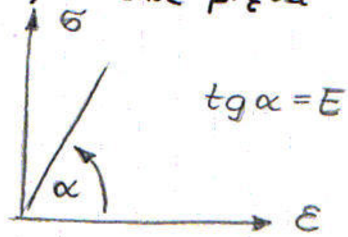


N - siła normalna

A - pole przekroju

L - długość pręta

ΔL - wydłużenie pręta



odkształcenie

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad [-]$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$ (naprężenie normalne)

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$ (odkształcenie normalne)

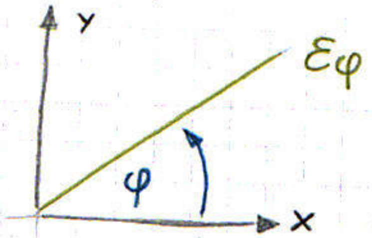
Płaski stan odkształcenia

tensometr - mierzy odkształcenie podłużne,

odkształcenia :

- podłużne - ε_x , ε_y
- postaciowe - γ_{xy}

Wyznaczenie odkształcenia podłużnego w dowolnym kierunku (zorientowany pod kątem φ)



$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Odkształcenia główne i ich kierunki

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$ (odkształcenia gł.)

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

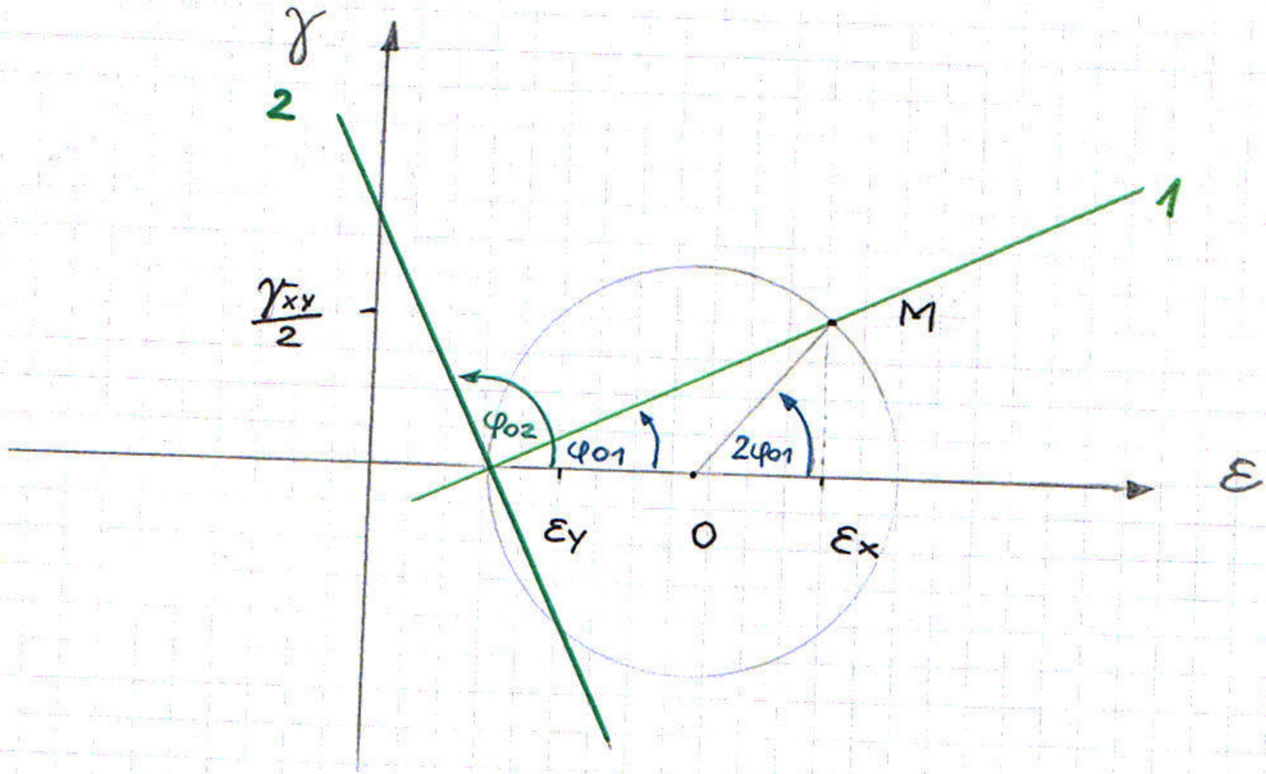
(kierunki gł.)

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos 2\varphi_{01} > 0 \Rightarrow \varphi_{01}$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos 2\varphi_{02} < 0 \Rightarrow \varphi_{02}$$

Konstrukcja koła Mohra

Str. 2.

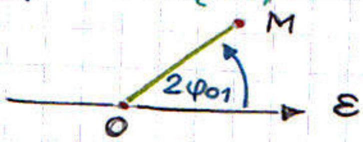


1° zaznaczamy ε_x, ε_y na osi ε

2° środek koła $O = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0 \right)$ - współrzędne

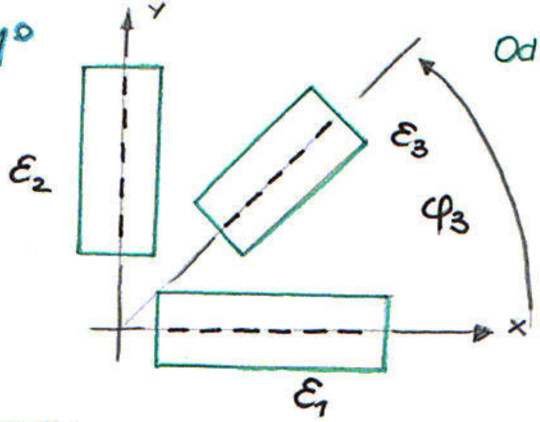
3° odkładamy od ε_x wartość $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ - punkt M

kąt $2\varphi_{01}$ między odcinkiem $\overrightarrow{OM}$ i osią ε



4° konstrukcja kątów φ_{01}, φ_{02}

1°



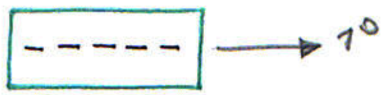
Odkształcenia

Wyznaczyć odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

korzystamy z wzoru:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cdot\cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cdot\sin 2\varphi$$

!



tensometr - mierzy odkształcenia podłużne (ε) na kierunku 1°

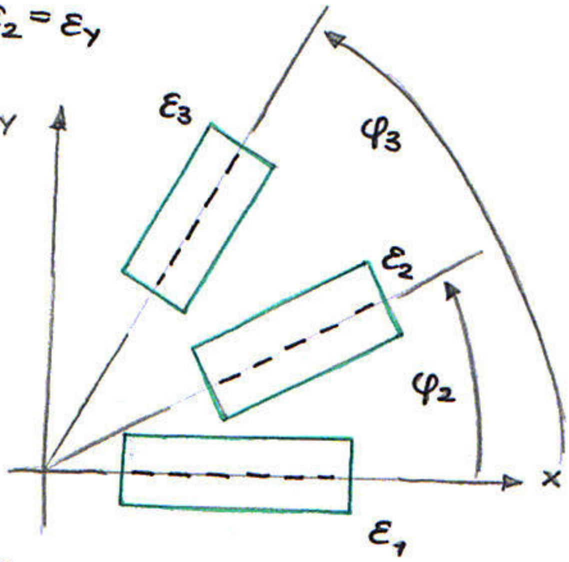
dane:

φ_3, ε_1, ε_2, ε_3

rozwiązanie:

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \varepsilon_3 \text{ dla } \varphi_3 \rightarrow \text{niewiadoma } \gamma_{xy} \text{ (równanie z jedną niewiadomą)} \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_y \end{cases}$$

2°



dane:

ε_1, ε_2, ε_3, φ_2, φ_3

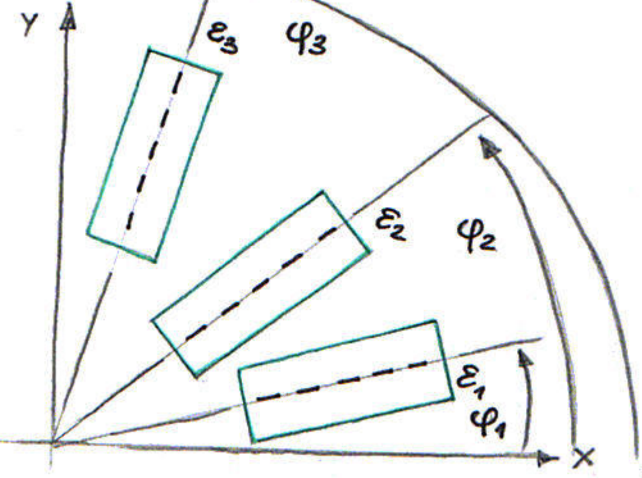
niewiadome: γ_{xy}, ε_y

rozwiązanie:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_x$

$$\left.\begin{cases} \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon_2 \text{ dla } \varphi_2 \text{ niewiadome: } \gamma_{xy},\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{\varphi_3} = \varepsilon_3 \text{ dla } \varphi_3 \text{ niewiadome } \gamma_{xy},\ \varepsilon_y \end{cases}\right\} \text{ układ równań - dwie niewiadome,}$$

3°



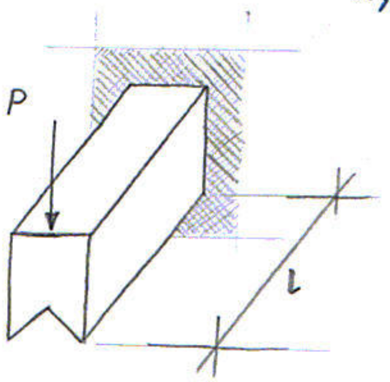
dane: ε_1, ε_2, ε_3, φ_1, φ_2, φ_3

$$\begin{cases} \varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_1 \text{ dla } \varphi_1 \\ \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon_2 \text{ dla } \varphi_2 \\ \varepsilon_{\varphi_3} = \varepsilon_3 \text{ dla } \varphi_3 \end{cases}$$

- układ trzech równań z trzema niewiadomymi: ε_x, ε_y, γ_{xy}

Zginanie proste

Dana jest belka o długości l obciążona siłą P.
Wyznaczyć ekstrymalne naprężenia normalne.

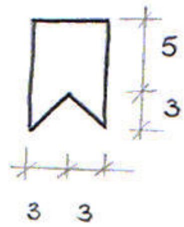


dane:

$l = 2\,m$

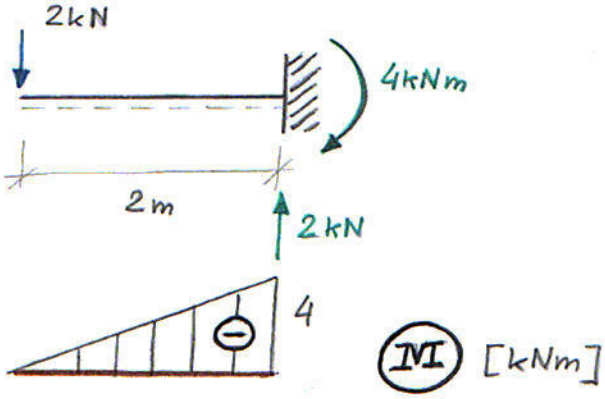
$P = 2\,kN$

przekrój



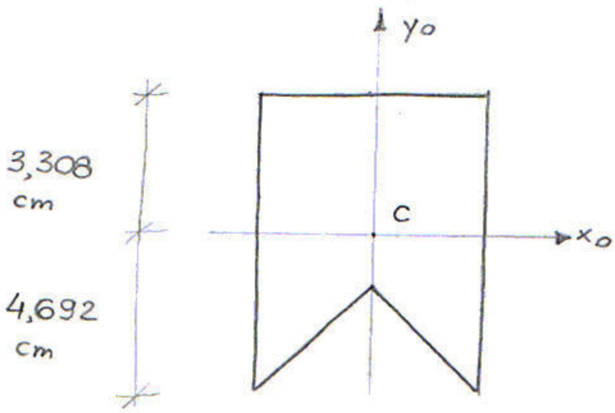
rozwiązanie:

1° wyznaczenie M_{ekstr}



$$M_{ekstr} = 4\,kNm = 400\,kNcm$$

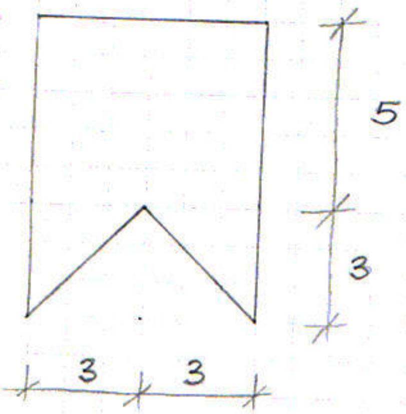
2° analiza przekroju - wyznaczenie I_x



$$I_x = 151,807\,cm^4$$

(obliczenia na kolejnej stronie)

3° Wyznaczenie naprężeń normalnych σ



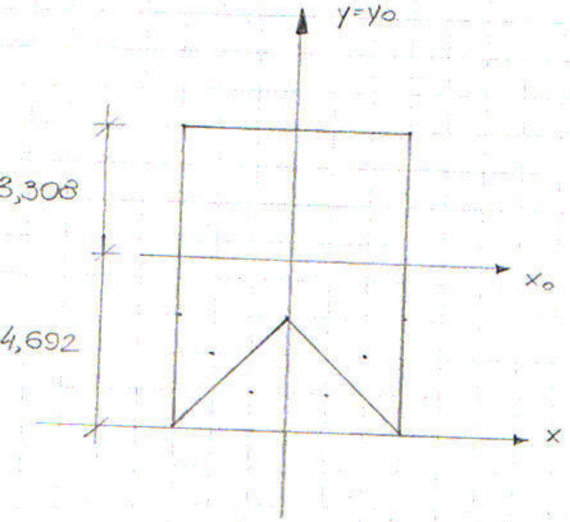
Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności.

Momenty bezwładności

(Ad. 2°)

Charakterystyka przekroju

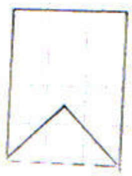
Rozwiązanie:



$$A = 8\cdot 6 - 3\cdot 3 = 48 - 9 = 39 \ cm^4$$

$$S_x = 8\cdot 6\cdot 4 - 2\left(3\cdot 3\cdot \tfrac{1}{2}\right)\cdot 1 = 192 - 9 = 183 \ cm^3$$

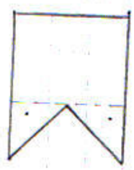
$$y_c = \frac{S_x}{A} = 4{,}692 \ cm$$



$$I_x = \frac{6\cdot 8^3}{12} + 6\cdot 8\cdot 0{,}692^2 - 2\left[\frac{3\cdot 3^3}{36} + \left(3\cdot 3\cdot \tfrac{1}{2}\right)\cdot 3{,}692^2\right] =$$

$$= \underline{\underline{151{,}807 \ cm^4}}$$

inny sposób:



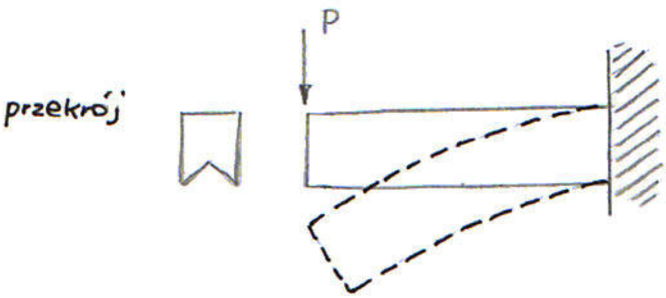
$$I_x = \frac{6\cdot 5^3}{12} + 6\cdot 5\cdot 0{,}808^2 + 2\left[\left(3\cdot 3\cdot \tfrac{1}{2}\right)\cdot 2{,}692^2 + \frac{3\cdot 3^3}{36}\right] =$$

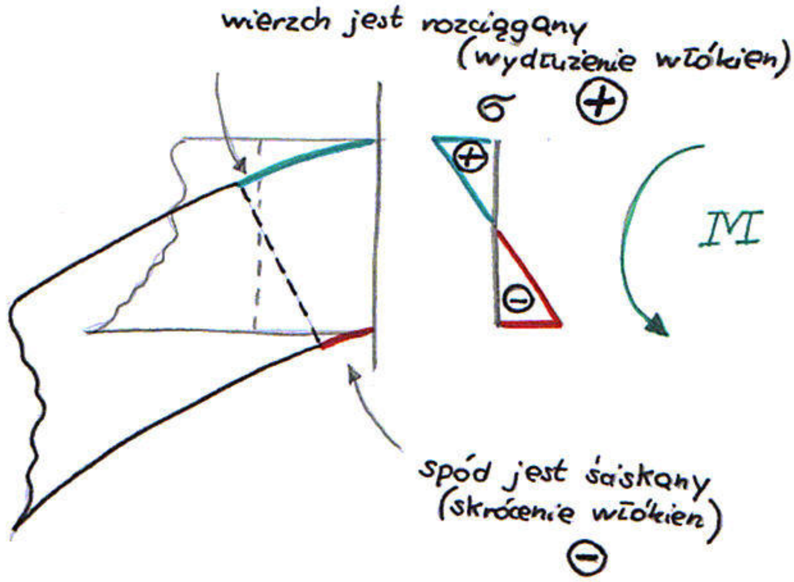
$$= 151{,}807 \ cm^4$$

$$I_y = \frac{8\cdot 6^3}{12} - 2\cdot\left(\frac{3\cdot 3^3}{36} + \left(3\cdot 3\cdot \tfrac{1}{2}\right)\cdot 1^2\right) = 130{,}5 \ cm^4$$

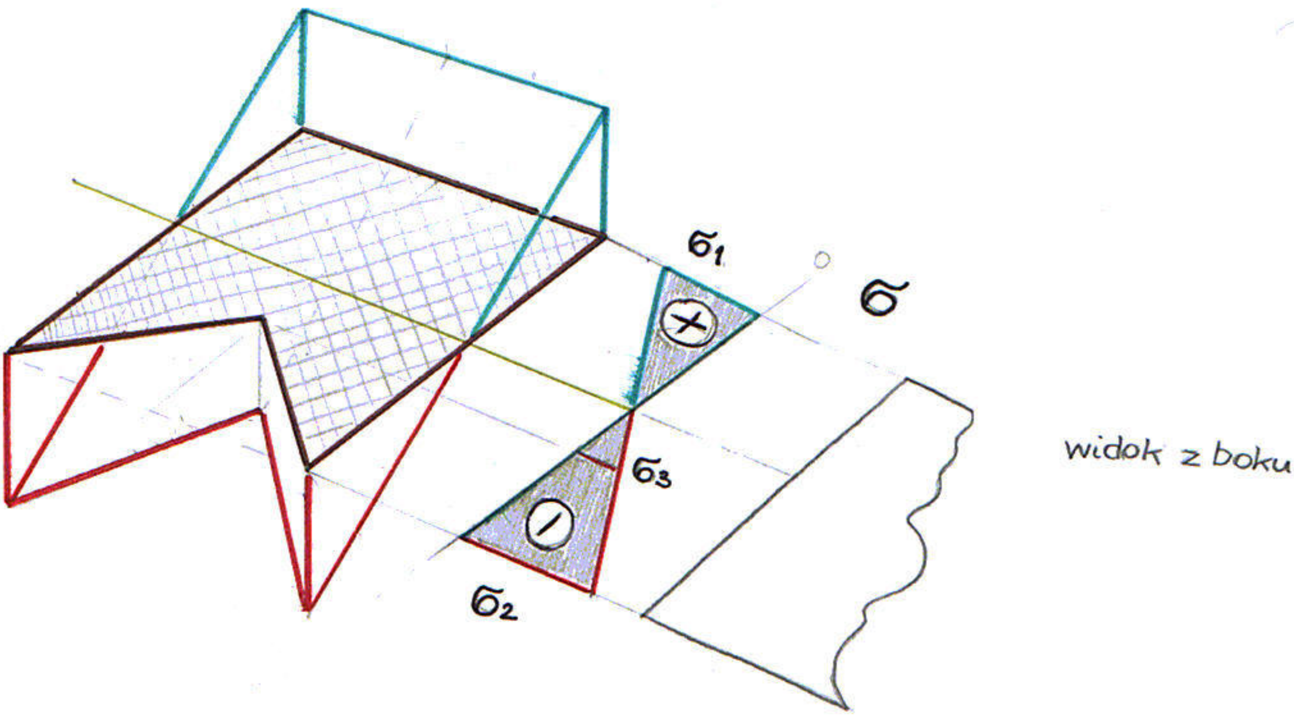
3.°

deformacja:

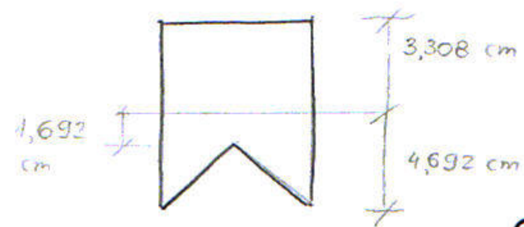




naprężenia:



σ_1, σ_2 - naprężenia ekstrymalne



$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = 2{,}635\, y$$

$$\sigma_1 = \sigma(y = 3{,}308) = 8{,}716 \ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma(y = 4{,}692) = 12{,}363 \ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_3 = \sigma(y = 1{,}692) = 4{,}458 \ \frac{kN}{cm^2}$$