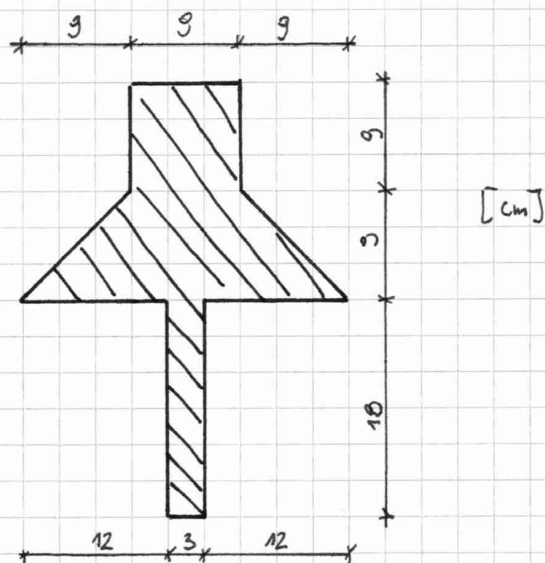
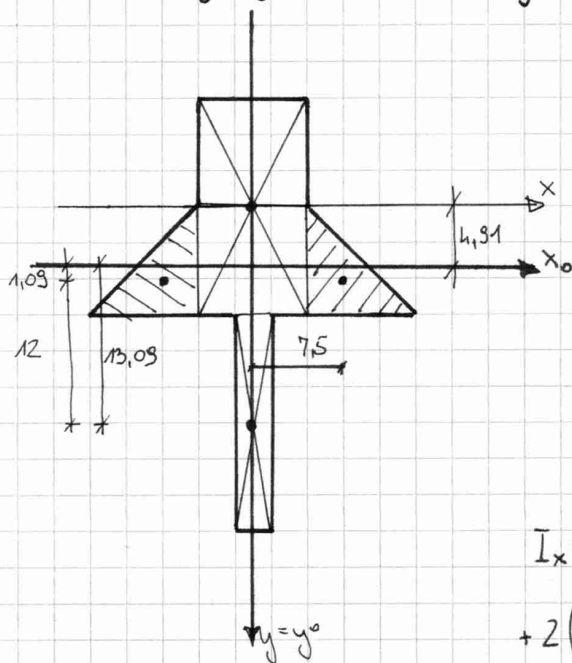


Zad 1.

Wyznaczyć rceń przekroju.



1° Charakterystyka przekroju.



$$A = 9 \cdot 18 + 2 \cdot \left(9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 18 = 297 [\text{cm}^2]$$

$$y_0 = \frac{S_x}{A}$$

$$S_x = \left(9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\right) \cdot 2 + 3 \cdot 18 \cdot 18 = 1458 [\text{cm}^3]$$

$$y_0 = \frac{1458}{297} = 4.91 [\text{cm}]$$

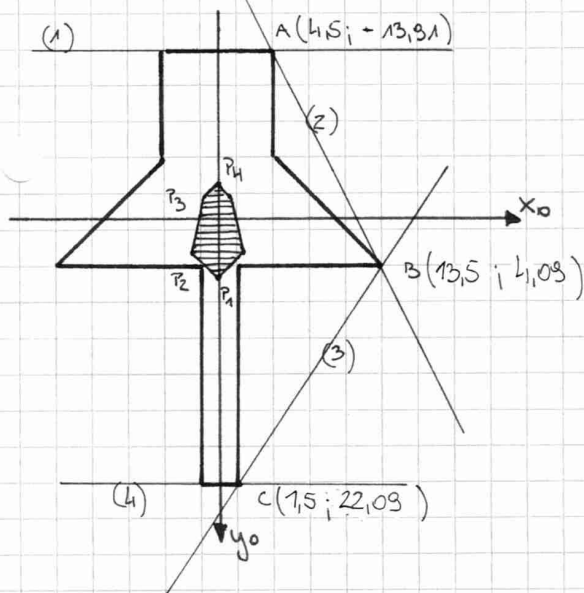
$$\begin{aligned} I_x &= \frac{18^3 \cdot 9}{12} + 18 \cdot 9 \cdot (4.91)^2 + \frac{18^3 \cdot 3}{12} + 18 \cdot 3 \cdot (13.09)^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{9 \cdot 9^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1.09^2 \right) = 4374 + 3805.5122 + 1458 + 3252.7974 + \\ &+ 460.7361 = 13451.0457 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{9^3 \cdot 18}{12} + \frac{18 \cdot 3^3}{12} + 2 \left(\frac{9 \cdot 9^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7.5^2 \right) = \\ &= 1093.5 + 40.5 + 4920.75 = 6054.75 \end{aligned}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow i_x = \sqrt{\frac{13451.0457}{297}} = \sqrt{45.29} [\text{cm}]$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow i_y = \sqrt{\frac{6054.75}{297}} = \sqrt{20.39} [\text{cm}]$$

UNAGA: Nie ma konieczności wyliczania tych pierwiastków, gdyż w dalszych obliczeniach wystarczy z i_x^2 i i_y^2 .



Użyjemy ze wzoru na prostą przechodzącą przez 2 punkty:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$v = \frac{-ix^2}{y_0}$$

$$u = \frac{-iy^2}{x_0}$$

2° Wyznaczenie punktów dla odcięcia przekroju:

* prosta (1) $\rightarrow P_1$

$$x_0 = \infty$$

$$y_0 = -13,91$$

$$u = \frac{-iy^2}{x_0} = \frac{-20,39}{\infty} = 0 \text{ [cm]}$$

$$v = \frac{-ix^2}{y_0} = \frac{-65,49}{-13,91} = 4,71 \text{ [cm]}$$

$$P_1(0; 4,71)$$

* prosta (2) $\rightarrow P_2$ A(4,5; -13,91) B(13,5; 4,09)

$$y + 13,91 = \frac{4,09 + 13,91}{13,5 - 4,5} (x - 4,5)$$

$$y + 13,91 = 2x - 9$$

$$y = 2x - 22,91$$

$$x_0 = 11,46$$

$$y_0 = -22,91$$

$$u = \frac{-20,39}{11,46} = -1,78 \text{ [cm]}$$

$$v = \frac{-65,49}{-22,91} = 2,86 \text{ [cm]}$$

$$P_2(-1,78; 2,86)$$

* prosta (3) $\rightarrow P_3$ B(13,5; 4,09) C(1,5; 22,09)

$$y - 4,09 = \frac{22,09 - 4,09}{1,5 - 13,5} (x - 13,5)$$

$$y - 4,09 = -1,5x + 20,25$$

$$y = -1,5x + 24,34$$

$$x_0 = 16,23$$

$$y_0 = 24,34$$

$$u = \frac{-20,39}{16,23} = -1,26 \text{ [cm]}$$

$$v = \frac{-65,49}{24,34} = -2,69 \text{ [cm]}$$

$$P_3(-1,26; -2,69)$$

* prosta (4) $\rightarrow P_4$

$$x_0 = \infty$$

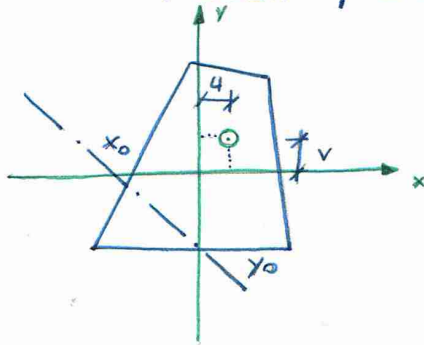
$$y_0 = 22,09$$

$$u = \frac{-20,39}{\infty} = 0 \text{ [cm]}$$

$$v = \frac{-65,49}{22,09} = -2,96 \text{ [cm]}$$

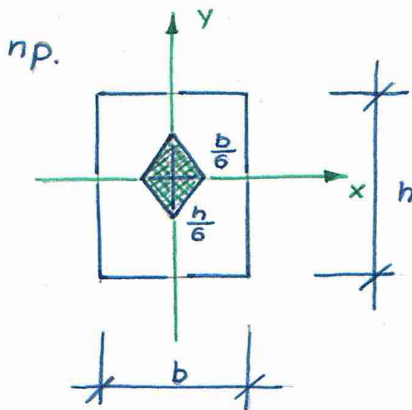
$$P_4(0; -2,96)$$

Rdzeń przekroju



Mając dane położenia osi obojętnej (x_0, y_0) można wyznaczyć współrzędne (u, v) przyłożenia siły

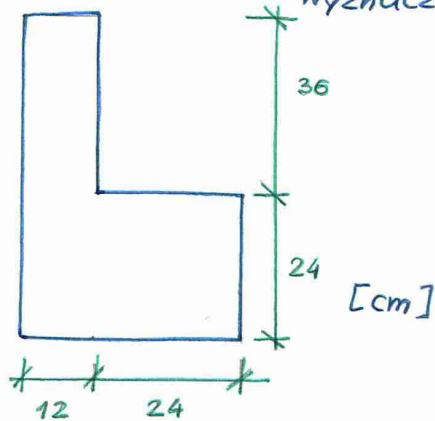
Zbiór punktów przyłożenia siły normalnej, dla których naprężenia w przekroju mają jednakowy znak nazywamy **Rdzeniem przekroju**



$$\begin{cases} u = -\frac{i_y^2}{x_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot y_0} \\ v = -\frac{i_x^2}{y_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot x_0} \end{cases} \quad \begin{cases} i_y^2 = \frac{I_y}{A} \\ i_x^2 = \frac{I_x}{A} \end{cases}$$

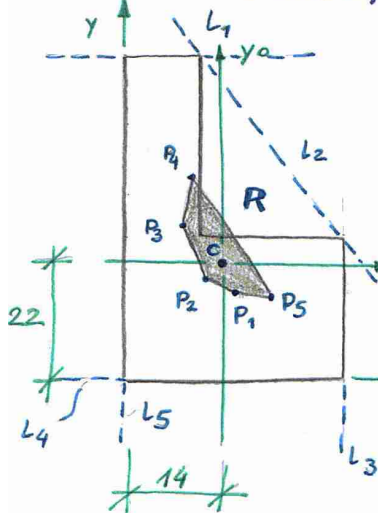
Zad.

Wyznaczyć rdzeń przekroju



Rozwiązanie:

1° Charakterystyki geometryczne



pole
momenty
statyczne

$$A = 36 \cdot 24 + 36 \cdot 12 = 1296 \text{ cm}^2$$

$$S_x = 36 \cdot 24 \cdot 12 + 36 \cdot 12 \cdot 42 = 28512 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 36 \cdot 24 \cdot 18 + 36 \cdot 12 \cdot 6 = 18144 \text{ cm}^3$$

środek
ciężkości

$$y_c = \frac{S_x}{A} = 22 \text{ cm}$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = 14 \text{ cm}$$

momenty
bezwładności

$$I_x = \frac{36 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 36 \cdot 10^2 + \frac{12 \cdot 36^3}{12} + 12 \cdot 36 \cdot 20^2 = 347328 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{24 \cdot 36^3}{12} + 24 \cdot 36 \cdot 4^2 + \frac{36 \cdot 12^3}{12} + 36 \cdot 12 \cdot 8^2 = 139968 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 36 \cdot 24 \cdot (-10) \cdot 4 + 12 \cdot 36 \cdot (-8) \cdot 20 = -103680 \text{ cm}^4$$

promienie
bezwładności

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = 108 \text{ cm}^2$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = 268 \text{ cm}^2$$

2° Wyznaczenie punktów skrajnych rdzenia

a). dla L_1

$$\begin{cases} x_0 = \infty \\ y_0 = 38 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -\frac{i_y^2}{x_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot y_0} = 2,11 \text{ cm} \\ v = -\frac{i_x^2}{y_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot x_0} = -7,05 \text{ cm} \end{cases}$$

$$P_1(u_1, v_1) = [2,11 ; -7,05]$$

b). dla L_2

wyznaczenie x_0 i y_0

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 22 + b \\ 38 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 38 + 2 \cdot a \\ 2 = a \cdot 22 + 38 + 2a \\ 24a = -36 \\ a = -\frac{3}{2} \\ b = 35 \end{cases} \quad y = -\frac{3}{2}x + 35$$

$$\begin{cases} x_0 = 23,33 \text{ cm} \\ y_0 = 35 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -\frac{i_y^2}{x_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot y_0} = -2,34 \text{ cm} \\ v = -\frac{i_x^2}{y_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot x_0} = -4,23 \text{ cm} \end{cases}$$

$$P_2 = [-2,34 ; -4,23]$$

c) dla L_3

$$\begin{cases} x_0 = 22 \text{ cm} \\ y_0 = \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{-iy^2}{x_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot y_0} = -4,91 \text{ cm} \\ v = \frac{-ix^2}{y_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot x_0} = 3,64 \text{ cm} \end{cases}$$

$$P_3 = \overset{\nearrow 0}{\downarrow 0} [-4,91; 3,64]$$

d) dla L_4

$$\begin{cases} x_0 = \infty \\ y_0 = -22 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{-iy^2}{x_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot y_0} = -3,64 \text{ cm} \\ v = \frac{-ix^2}{y_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot x_0} = 12,18 \text{ cm} \end{cases}$$

$$P_4 = \overset{\nearrow 0}{\downarrow 0} [-3,64; 12,18]$$

e) dla L_5

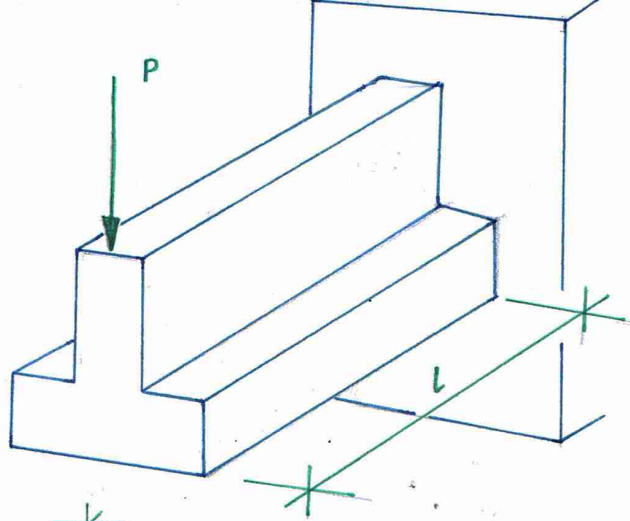
$$\begin{cases} x_0 = -14 \text{ cm} \\ y_0 = \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{-iy^2}{x_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot y_0} = 7,71 \text{ cm} \\ v = \frac{-ix^2}{y_0} - \frac{I_{xy}}{A \cdot x_0} = -5,71 \text{ cm} \end{cases}$$

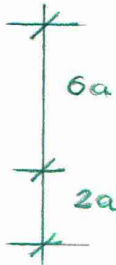
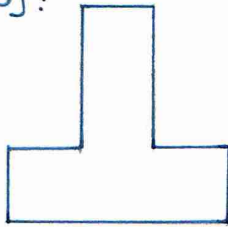
$$P_5 = \overset{\nearrow 0}{\downarrow 0} [7,71; -5,71]$$

Zad.

Wyznaczyć rozkład naprężeń stycznych (τ)



przekrój:



dane :

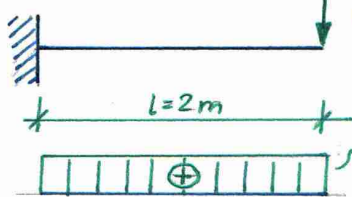
$$L = 2 \text{ m}$$

$$a = 1 \text{ cm}$$

$$P = 20 \text{ kN}$$

Rozwiązanie:

1° Wyznaczenie siły tnącej

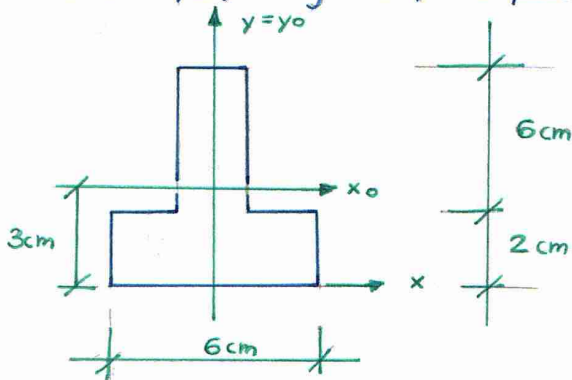


$P = 20 \text{ kN}$



$T_y = 20 \text{ kN}$

2° Charakterystyki geometryczne przekroju



środek ciężkości:

$$A = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^2$$

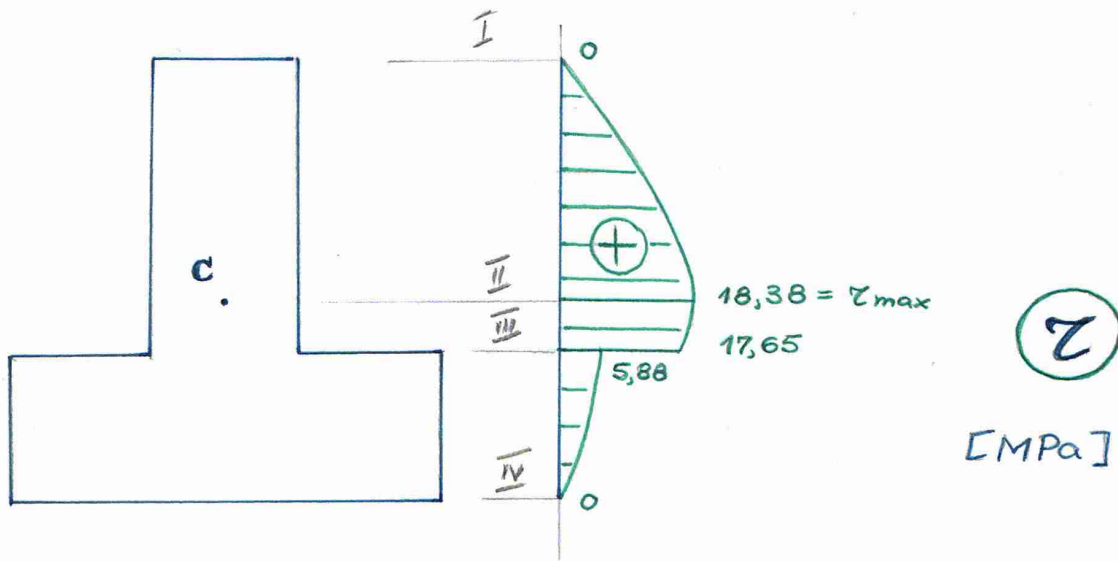
$$S_x = 6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 5 = 72 \text{ cm}^3$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = 3 \text{ cm}$$

moment bezwładności:

$$I_x = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + (2 \cdot 6) \cdot 2^2 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + (6 \cdot 2) \cdot 2^2 = 136 \text{ cm}^4$$

3° Rozkład naprężeń stycznych



poziom I $\tau = 0$ ponieważ $S_x(y) = 0$

poziom II $\tau = \frac{T_y S_x(y)}{I_x \cdot b} = \frac{20 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 2,5}{136 \cdot 2} = 1,838 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 18,38 \text{ MPa}$

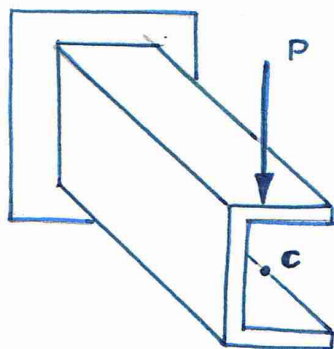
poziom III a). $\tau = \frac{20 \cdot (6 \cdot 2) \cdot 2}{136 \cdot 2} = 1,765 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 17,65 \text{ MPa}$

b). $\tau = \frac{20 \cdot (6 \cdot 2) \cdot 2}{136 \cdot 6} = 0,588 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 5,88 \text{ MPa}$

poziom IV $\tau = 0$ ponieważ $S_x(y) = 0$

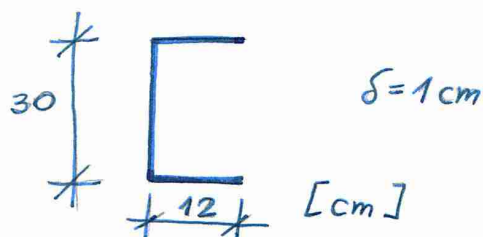
Określenie położenia środka ścinania (zginania)

Środek ścinania - jest to punkt w którym winna działać siła tnąca aby pręt był tylko zginany, w przeciwnym wypadku wystąpi również skręcanie,



c - środek ciężkości

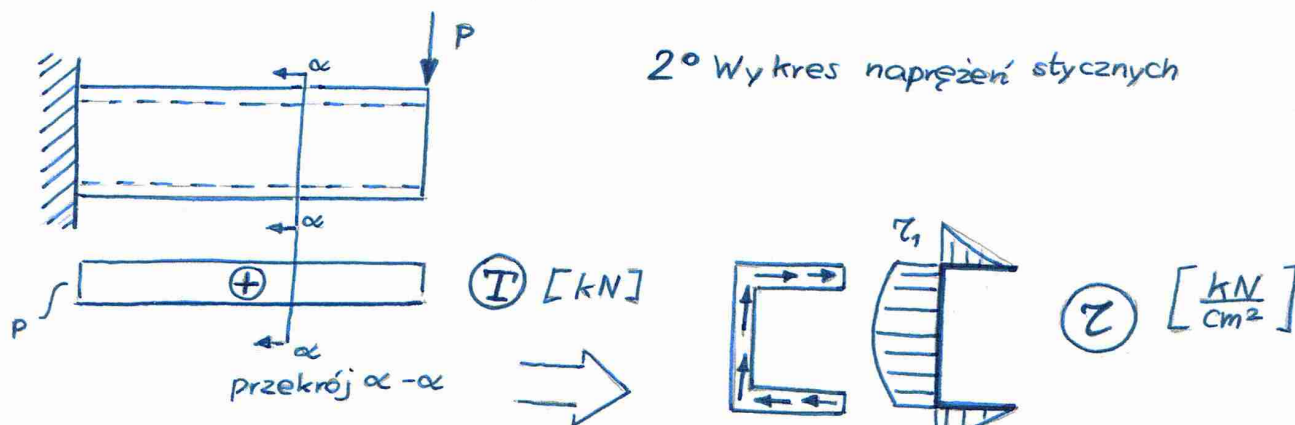
przekrój



1° charakterystyka przekroju

$$I_x = \frac{1 \cdot 30^3}{12} + 2 \left[\frac{12 \cdot 1^3}{12} + 12 \cdot 1 \cdot 15^2 \right] = 7650 \text{ cm}^4$$

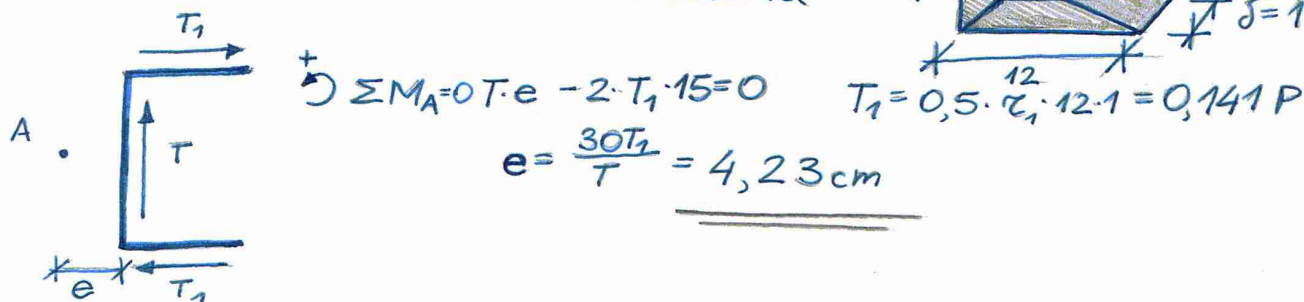
2° Wykres naprężeń stycznych



naprężenia styczne w przekroju $\alpha-\alpha$

$$z_1 = \frac{T_y \cdot S_y(x)}{I_x \cdot \delta} = \frac{P \cdot 12 \cdot 15 \cdot 1}{7650 \cdot 1} = 0,0235 P$$

3° Wyznaczenie środka ścinania



$$\sum M_A = 0 \quad T \cdot e - 2 \cdot T_1 \cdot 15 = 0$$

$$T_1 = 0,5 \cdot z_1 \cdot 12 \cdot 1 = 0,141 P$$

$$e = \frac{30 T_1}{T} = 4,23 \text{ cm}$$

T_1 - wypadkowa siła „zebrana” z pasa górnego/dolnego

T - wypadkowa siła „zebrana” z środknika ($T \approx D$)