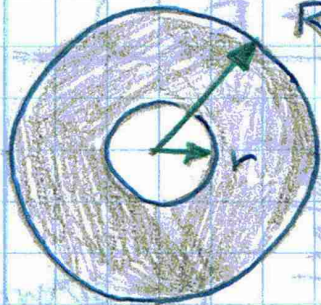


1°



$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2}$$

2°



$$I_0 = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}$$

3°

$$I_s = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n h_i \delta^3$$

pręt cienkościenny otwarty wielogateńowy

współczynnik  $\eta$  przyjmujemy jak dla przekroju zamkniętego (idealnego)

$$\eta = 1$$

po „rozwinęciu”



$$\sum h \approx 2\pi r$$

$$\delta = \text{const}$$

$$I_s = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot \delta^3$$

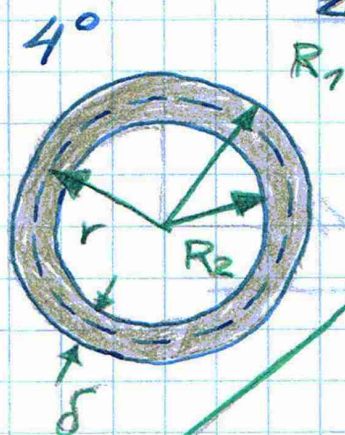
$$\sum_{i=1}^n h_i \delta^3$$

$$I_s = \frac{2}{3} \pi r \delta^3$$

WYZNACZANIE  
MOMENTÓW  
BEZWŁADNOŚCI



przekrój cienkościenny zamknięty



$$I_o = \frac{\pi \cdot (R_1^4 - R_2^4)}{2}$$

$$\begin{cases} R_1 = r + \frac{\delta}{2} \\ R_2 = r - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

PODSTAWIENIE

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi \cdot \left[ \left( r + \frac{\delta}{2} \right)^4 - \left( r - \frac{\delta}{2} \right)^4 \right]}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot \left[ \left( r + \frac{\delta}{2} \right)^2 + \left( r - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right] \cdot \left[ \left( r + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left( r - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]}{2} = \\ &= \pi \cdot \frac{\left( r^2 + r\delta + \frac{\delta^2}{4} + r^2 - r\delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \cdot \left( r^2 + r\delta + \frac{\delta^2}{4} - r^2 + r\delta - \frac{\delta^2}{4} \right)}{2} \\ &= \pi \cdot \frac{\left[ \frac{\delta^2}{4} \text{ pomijamy} \right] \cdot 2r\delta}{2} = 2\pi r^3 \delta \end{aligned}$$

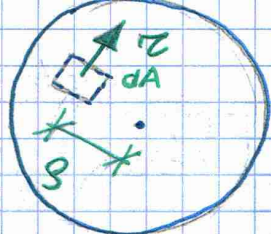
wartości bardzo małe

$$I_o = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \delta$$

! moment bezwładności na skręcanie = moment bezwładności biegunowy

$$I_o = I_s$$

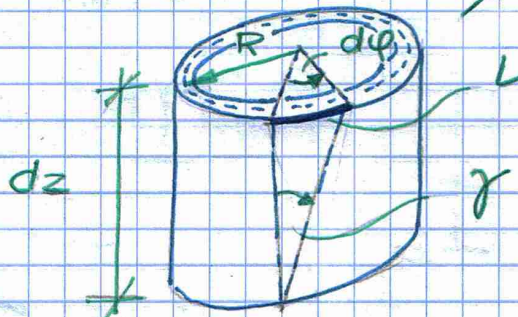
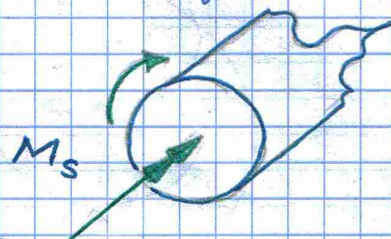




$$M_s = \int_A z \cdot \tau \, dA$$

moment  
skręcający

dla rury cienkościennej



! dla małych odkształceń

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(d\varphi) = d\varphi = \frac{L}{R} &\Rightarrow L = d\varphi \cdot R \\ \operatorname{tg}(\gamma) = \gamma = \frac{L}{dz} &\Rightarrow L = \gamma \cdot dz \end{aligned} \right\} d\varphi \cdot R = dz \cdot \gamma$$

zw. konstytutywne

$$[\tau = G \cdot \gamma]$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma}{R}$$

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \cdot R$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \underbrace{\frac{d\varphi}{dz}}_{\gamma} \cdot R$$

$$\begin{aligned} M_s &= \int_A \tau \cdot R \, dA = \int_A G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot R^2 \, dA = \\ &= G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \underbrace{\int_A R^2 \, dA}_{I_0} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_0 \end{aligned}$$

I<sub>0</sub>      biegunowy  
moment bezwładności

$$M_s = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_0$$

$$\frac{M_s \cdot dz}{G \cdot I_0} = d\varphi$$

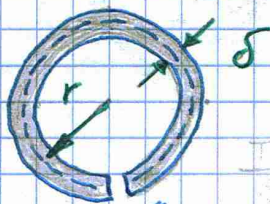
$$\left[ \varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_0} \right]$$

wyznaczenie  
kąta  
skręcenia :



# SKRĘCANIE SWOBODNE

przekrój cienkościenny (rozszyty)

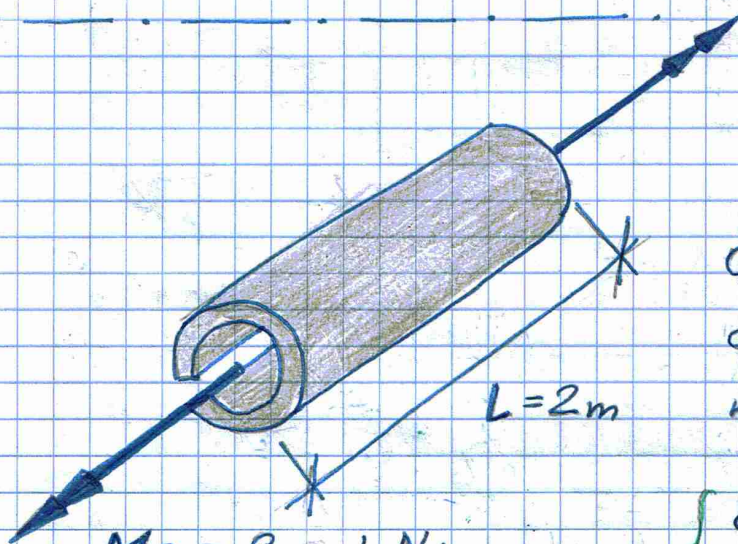


dany przekrój  $(r, \delta)$

$\delta$  - const. na całej długości

moment bezwładności  
na skręcanie

$$\begin{cases} I_s = \frac{2}{3} \pi r \delta^3 \\ W_s = \frac{2}{3} \pi r \delta^2 \end{cases}$$



$M_s = 2 \text{ kNm}$

Zad 1

Obliczyć kąt skręcenia  
danego przekroju cienkościennego otwartego

DANE:

$$\begin{cases} \delta = 1 \text{ cm} & G = 10^4 \text{ MPa} \\ r = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

1° charakterystyki przekroju

$$I_s = \frac{2}{3} \pi r \delta^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 0,1 \cdot (0,01)^3 = 2,094 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

2° wyznaczenie kąta skręcenia

$$\left[ \varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_s} \right] = \left[ \frac{\frac{\text{kNm}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}}{\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^4} \right] = -$$

wartość bezwymiarowa  
[rad]

$$\begin{cases} M_s = 2 \text{ kNm} \\ L = 2 \text{ m} \\ G = 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \\ I_s = 2,094 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{2 \cdot 2}{10^4 \cdot 2,094 \cdot 10^{-7}} = 1,910 \text{ rad} = 109^\circ 26'$$



Zad 2. Zakładając, że obliczony w zadaniu 1. kąt skręcenia jest kątem dopuszczalnym dla projektowanego elementu określić:

- 1° Grubaść przekroju zamkniętego, jakim można byłoby zastąpić użyty w zad. 1 przekrój otwarty (parametry wytrzymałościowe, geometryczne i obciążenie jak w zad 1.)
- 2° Grubaść przekroju zamkniętego, jakim można byłoby zastąpić użyty w zad. 1 przekrój otwarty stosując materiał o ciężar ciekrrotnie mniejszym  $G$ .

Ad 1°

$$M_s = 2 \text{ [kN]}$$

$$r = 10 \text{ [cm]}$$

$$\varphi_{gr} = 109^\circ 26' = 1,91 \text{ [rad]}$$

$$l = 2 \text{ [m]}$$

$$G = 10^4 \text{ MPa} = 10^7 \text{ [kPa]}$$

$$\varphi_{gr} = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot J_s} \Big/ \cdot \frac{J_s}{\varphi_{gr}}$$

$$J_s = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot \varphi_{gr}}$$

$$J_s = \frac{2 \cdot 2}{10^7 \cdot 1,91} = 2,094 \times 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$J_s = 20,94 \times 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} = 20,94 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_s = 2\pi \delta r^3 \Big/ : 2\pi r^3$$

$$\delta = \frac{J_s}{2\pi r^3}$$

$$\delta = \frac{20,94 \text{ [cm}^4\text{]}}{2 \cdot \pi \cdot 10^3 \text{ [cm}^3\text{]}} = 0,00333 \text{ [cm]}$$

Odp: Zastosowano przekrój o  $\delta = 0,034 \text{ [mm]}$

Ad 2°

$$M_s = 2 \text{ [kN]}$$

$$r = 10 \text{ [cm]}$$

$$\varphi_{gr} = 1,91 \text{ [rad]}$$

$$l = 2 \text{ [m]}$$

$$G = 10^7 \text{ [kPa]} \cdot 0,1 = 10^6 \text{ [kPa]}$$

$$J_s = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot \varphi_{gr}}$$

$$J_s = \frac{2 \cdot 2}{10^6 \cdot 1,91} = 20,94 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}$$

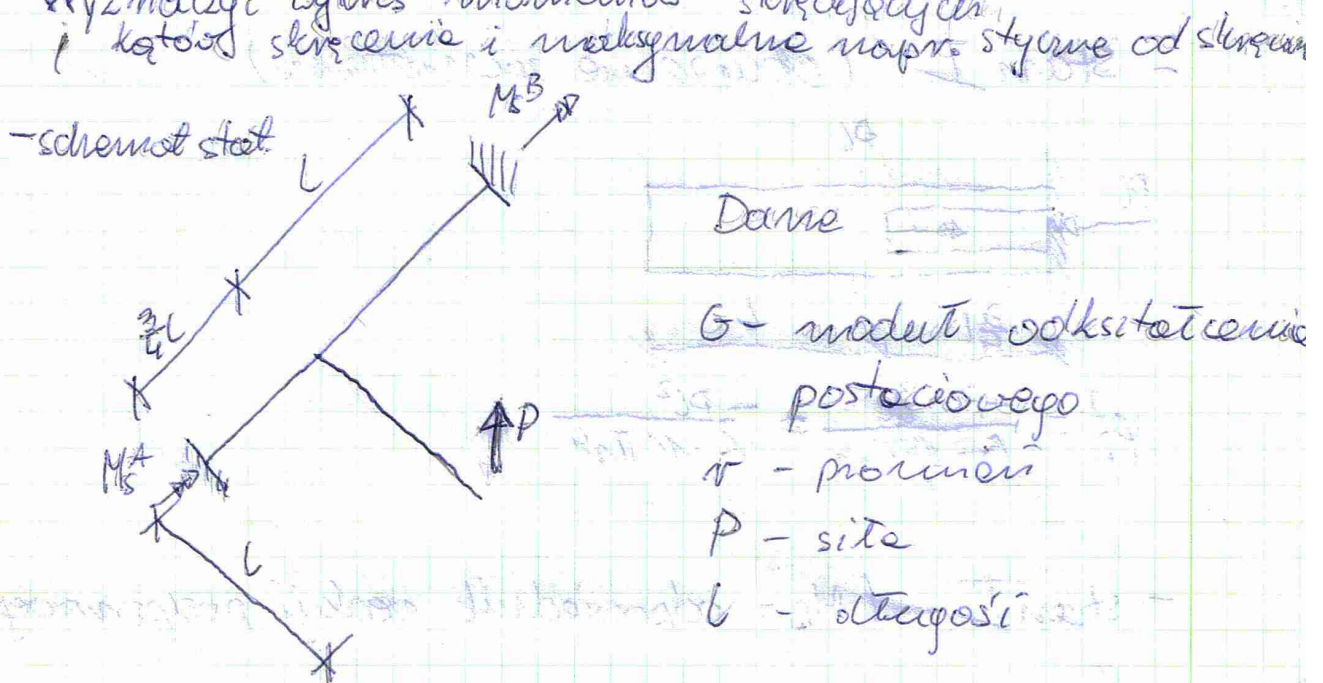
$$J_s = 20,94 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]} = 209,4 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} = 209,4 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$\delta = \frac{J_s}{2 \pi r^3}$$

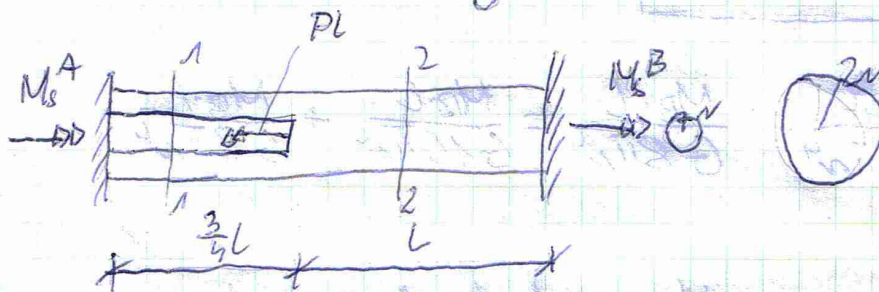
$$\delta = \frac{209,4 \text{ [cm}^4\text{]}}{2 \cdot \pi \cdot 10^3 \text{ [cm}^3\text{]}} = 0,0333 \text{ [cm]}$$

Odp: Zastosowano przekrój o  $\delta = 0,34 \text{ [mm]}$





- przekrój podłużny elementu skręcanego



układ jednostannie statycznie niewyznaczalny

Tworzymy układ statycznie wyznaczalny  
 przez „usunięcie” jednej z podpór.

W otrzymanym układzie obliczamy  
 kąty skręcenia dla dwóch nierównoległych  
 sterców

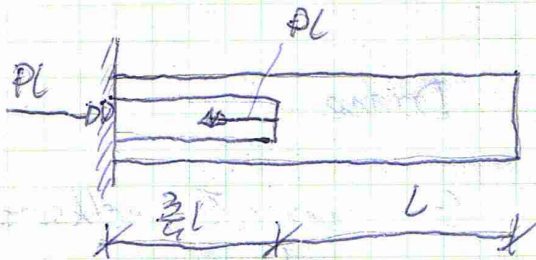
- wielkości geometryczne

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \cdot [(2r)^4 - r^4] = \frac{15}{2} \pi r^4$$

$$J_2 = \frac{\pi (2r)^4}{2} = 8 \pi r^4$$

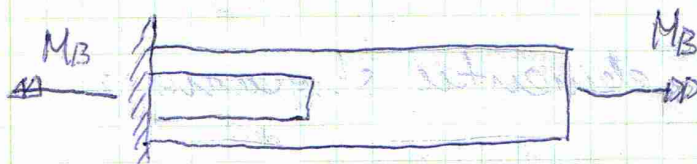


- stan I (obciążenie równomiernie)



$$\varphi_B^I = \frac{-q \cdot \frac{3}{4}L}{G \cdot \frac{15}{2}\pi n^4} = \frac{-qL^2}{G \cdot 10\pi n^4}$$

- stan II ( $M_B$  - odpowiednik reakcji podporowej)



$$\varphi_B^{II} = \frac{M_B \cdot \frac{3}{4}L}{G \cdot \frac{15}{2}\pi n^4} \quad \frac{M_B \cdot L}{G \cdot 8\pi n^4} = \frac{M_B \cdot L}{G \cdot 10\pi n^4} + \frac{M_B \cdot L}{G \cdot 8\pi n^4}$$

W układzie rzeczywistym kąt skręcenia podpory B jest równy zero.

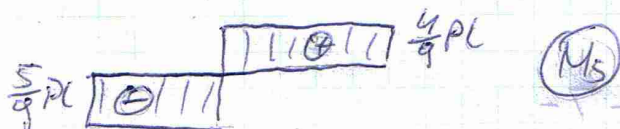
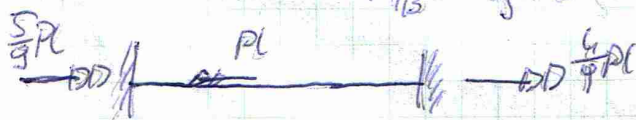
Stąd można zapisać równanie zgodności przemieszczeń

$$\varphi_B = \varphi_B^I + \varphi_B^{II} = 0$$

$$\frac{-qL \cdot \frac{3}{4}L}{G \cdot 10\pi n^4} + \frac{M_B \cdot L}{G \cdot 10\pi n^4} + \frac{M_B \cdot L}{G \cdot 8\pi n^4} = 0$$

$$-4qL + 4M_B + 5M_B = 0$$

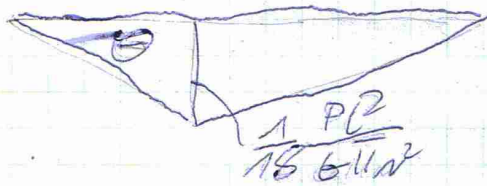
$$M_B = \frac{4}{9}qL \quad \text{stąd} \quad M_s^* = \frac{5}{9}qL \quad (\sum M = 0)$$





Kąty skręcenia

$$\varphi_1 = \Delta\varphi_{A-1} = \Delta\varphi_{1-B} = \frac{-\frac{5}{8}Pl \cdot \frac{3}{4}l}{G \cdot \frac{15}{2}\pi r^4} = -\frac{1}{18} \frac{Pl^2}{G\pi r^4}$$



$$\varphi_A = 0, \varphi_D = 0$$

Napężenie

$$\tau_{max} = \frac{M_S}{I_0} \cdot r$$

- odcinek 1  $\tau_{max}^1 = \frac{M_S^A}{I_1} \cdot 2r$

- odcinek 2  $\tau_{max}^2 = \frac{M_S^B}{I_2} \cdot 2r$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{max}^1 \\ \tau_{max}^2 \end{array} \right\} \max(\tau_1, \tau_2) = \tau_{max}$$