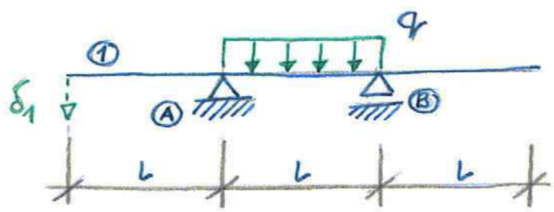
Metoda Eulera

Zad.

Obliczyć przemieszczenie pionowe punktu ① [δ_1]

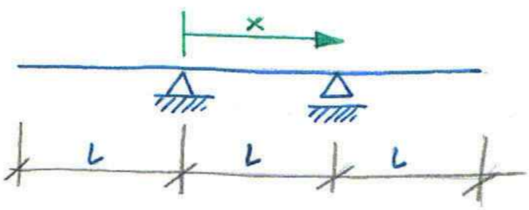


Rozwiązanie: Sposób I

obliczenia przy użyciu metody Eulera

równanie Eulera [$y'' = \frac{M}{EI}$]

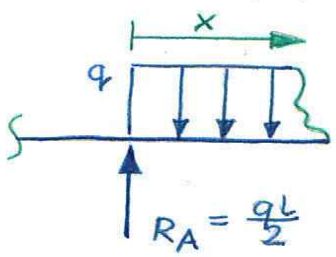
1° warunki brzego dla danego układu



$x \in \langle -L, 2L \rangle$

$$\begin{cases} \text{dla } x = 0 & y = 0 \\ \text{dla } x = L & y = 0 \end{cases}$$

2° wyznaczenie równania ugięcia
- rozpatrzymy przedział $x \in \langle 0, L \rangle$



według wzoru Eulera

$$y'' \cdot EI = M(x)$$

$$y'' \cdot EI = M(x) = \frac{qL}{2} \cdot x - (q \cdot x)\frac{x}{2} = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{qx}{2}(L - x)$$

wyznaczenie $y' \cdot EI$ poprzez całkowanie względem zmiennej x

$$y' \cdot EI = \left[\frac{q}{2} \cdot (Lx - x^2)\right]' = \frac{q}{2} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1\right)$$

wyznaczenie $y \cdot EI$ (analogicznie)

$$y \cdot EI = \left[\frac{q}{2}\left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1\right)\right]' = \frac{q}{2}\left(L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

wyznaczenie stałych C_1, C_2 na podstawie warunków brzegowych war. brzeg. $\begin{cases} y(x=0)=0 \\ y(x=L)=0 \end{cases}$

$$0 = EI\cdot y(x=0) = \frac{q}{2}\cdot C_2 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$0 = EI\cdot y(x=L) = \frac{q}{2}\cdot\left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} + C_1 L\right)$$

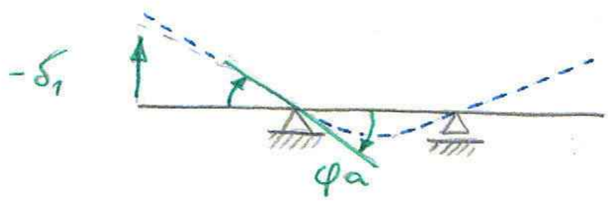
$$0 = \frac{q}{2}\left(\frac{2\cdot L^4}{12} - \frac{L^4}{12} + C_1\cdot L\right) \quad /:\frac{q}{2}$$

$$0 = \frac{L^4}{12} + C_1\cdot L \Rightarrow \underline{C_1 = -\frac{L^3}{12}}$$

3° ostatecznie równanie ugięcia jest dane wzorem:

$$y = \frac{q}{2EI}\cdot\left(L\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3}{12}\cdot x\right)$$

wyznaczenie kąta obrotu stycznej do osi belki w punkcie A



$$\varphi a = y'(x=0)$$

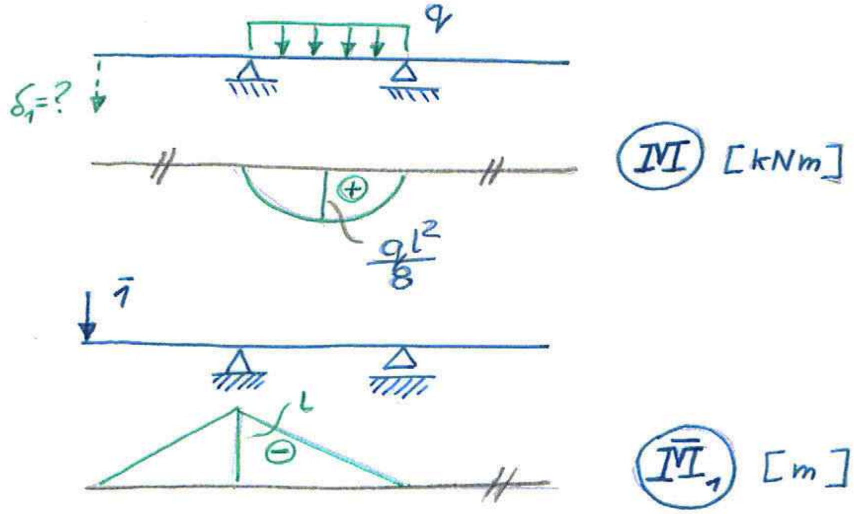
$$\varphi a = y'(x=0) = \frac{q}{2EI}\cdot\frac{L^3}{12} = \frac{qL^3}{24}$$

dla małych przemieszczeń:

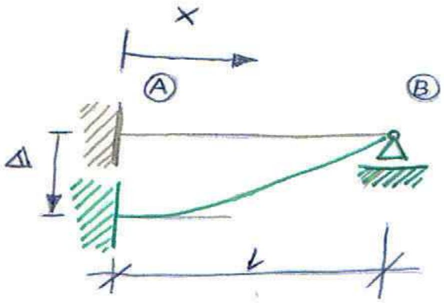
! $tg(\varphi a) = \varphi a$

$$tg(\varphi a) = \frac{-\delta_1}{L} \Rightarrow \underline{\delta_1 = -\frac{qL^4}{24}}$$

sposób II



$$\delta_1 = \int \frac{M \cdot \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} l \right) = -\frac{ql^4}{24}$$



Zad. Wyznaczyć reakcje podporowe wywołane przemieszczeniem podpory Ⓐ o wielkość Δ

Rozwiązanie:

warunki brzegowe:

dla $x=0$ $\quad y=\Delta$

dla $x=0$ $\quad y'=0$

dla $x=L$ $\quad y=0$

równanie Eulera:

$$y''(x)=\frac{-M(x)}{EI}$$

zależności różniczkowe:

$$\left.\begin{array}{l} M'(x)=T(x) \\ T'(x)=-q(x) \end{array}\right. \Rightarrow \quad M''(x)=-q(x)$$

$$y^{IV}(x)=\frac{-q(x)}{EI}=0 \quad (\text{brak obciążenia } q(x)=0)$$

całkowanie:

$$y^{IV}(x)=0$$

$$y'''(x)=C_1$$

$$y''(x)=C_1 x+C_2$$

$$y'(x)=C_1\frac{x^2}{2}+C_2\cdot x+C_3$$

$$y(x)=C_1\cdot\frac{x^3}{6}+C_2\cdot\frac{x^2}{2}+C_3\cdot x+C_4$$

wyznaczenie stałych (wprowadzenie warunków brzegowych)

dla $x=0$ $\quad y(x=0)=\Delta=C_4$

dla $x=0$ $\quad y'(x=0)=0=C_3$

dla $x=L$ $\quad y(x=L)=C_1\cdot\frac{L^3}{6}+C_2\frac{L^2}{2}+\Delta=0$

! dla $x=L$ $\quad M=0$ (moment w przegubie równy zero) $\quad y''(x)=\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow y''(x=L)=0$

$$y''(x=L)=0=C_1\cdot L+C_2$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{l^3}{6} + C_2 \cdot \frac{l^2}{2} + \Delta = 0 \\ C_1 \cdot l + C_2 = 0 \Rightarrow \quad C_2 = -C_1 l \end{cases}$$

$$C_1 \cdot \frac{l^3}{6} - C_1 \cdot \frac{l^3}{2} + \Delta = 0$$

$$C_1 \cdot \frac{1-3}{6} \cdot l^3 + \Delta = 0$$

$$C_1 \left(-\frac{1}{3}\right) l^3 + \Delta = 0$$

$$C_1 = -\Delta \cdot \left(-\frac{3}{l^3}\right) \Rightarrow C_1 = \frac{3\Delta}{l^3}$$

$$C_2 = -\frac{3\Delta}{l^2}$$

stałe:

$$C_1 = \frac{3\Delta}{l^3}$$
$$C_2 = -\frac{3\Delta}{l^2}$$
$$C_3 = 0$$
$$C_4 = \Delta$$

równanie ugięcia:

$$y(x) = \frac{3\Delta}{l^3} \cdot \frac{x^3}{6} + \left(-\frac{3\Delta}{l^2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + \Delta$$

$$y''(x) = \frac{3\Delta}{l^3} \cdot x - \frac{3\Delta}{l^2}$$

$$y''(x) = \frac{-M(x)}{EI} \Rightarrow M(x) = -y''(x) \cdot EI$$

siły wew.:

$$M(x) = -\left(\frac{3\Delta}{l^3} x - \frac{3\Delta}{l^2}\right) \cdot EI = \frac{3EI\Delta}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

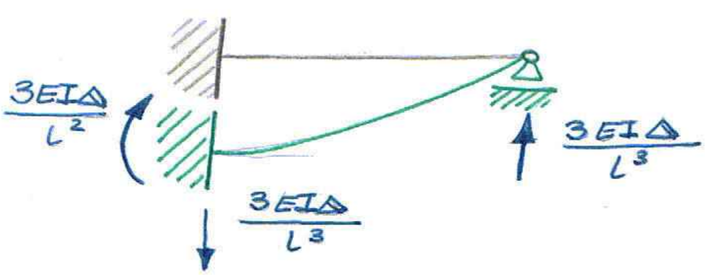
$$M'(x) = T(x) = -\frac{3EI\Delta}{l^3}$$

reakcje podporowe:

$$M_A = M(x=0) = \frac{3EI\Delta}{l^2}$$

$$T_A = T(x=0) = -\frac{3EI\Delta}{l^3}$$

$$T_B = T(x=l) = \frac{3EI\Delta}{l^3}$$

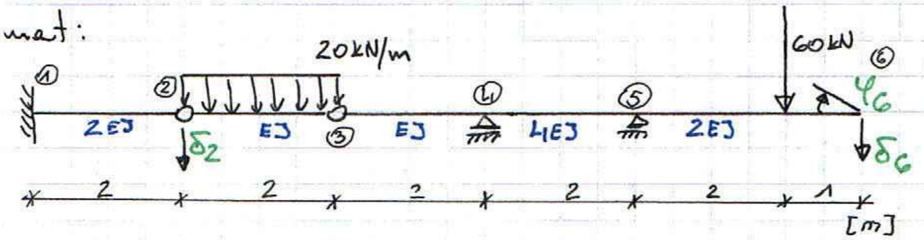


Metoda Mohra

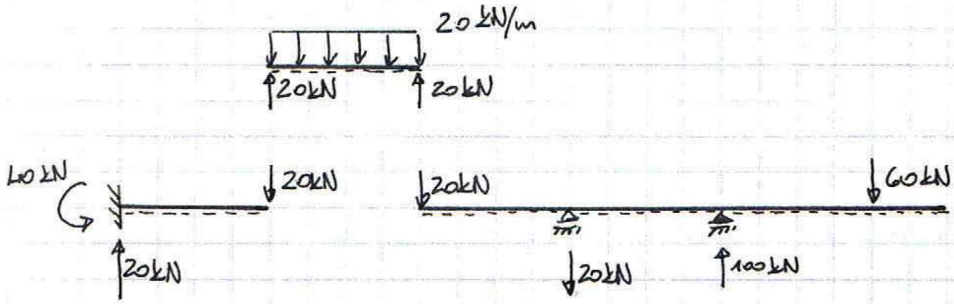
Zad: Stosując metodę Mohra obliczyć: $\varphi_6, \delta_6, \delta_2$

Narysować: * Schemat pracy belki przegubowej
* Wykres momentów od zadanego obciążenia.
* Schemat wtórny (obciążenie)
* Obciążenie wtórne z zaznaczeniem wartości charakterystycznych.

Schemat:



1° Schemat pracy belki przegubowej:



$\Sigma M_4 = 0 \Rightarrow 60\cdot 4 - 20\cdot 2 - 2R_5 = 0$

$2R_A = 240 - 40 = 200$

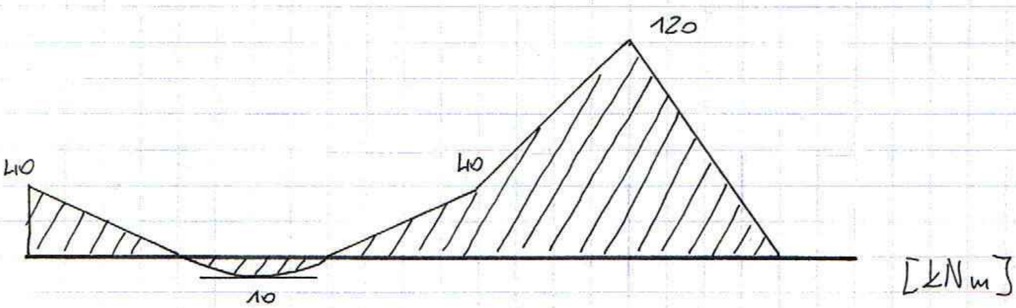
$R_3 = 100$ [kN]

$\Sigma P_y = 0$ [$\uparrow R_4$]

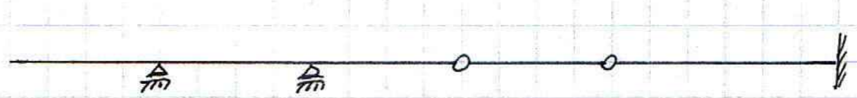
$20 + 60 - 100 - R_4 = 0$

$R_4 = -20$ [kN]

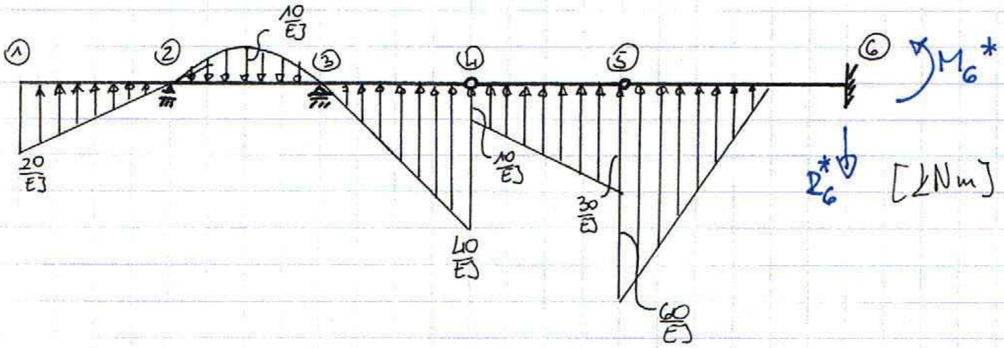
2° Wykres momentów:



3° Schemat wtórny:



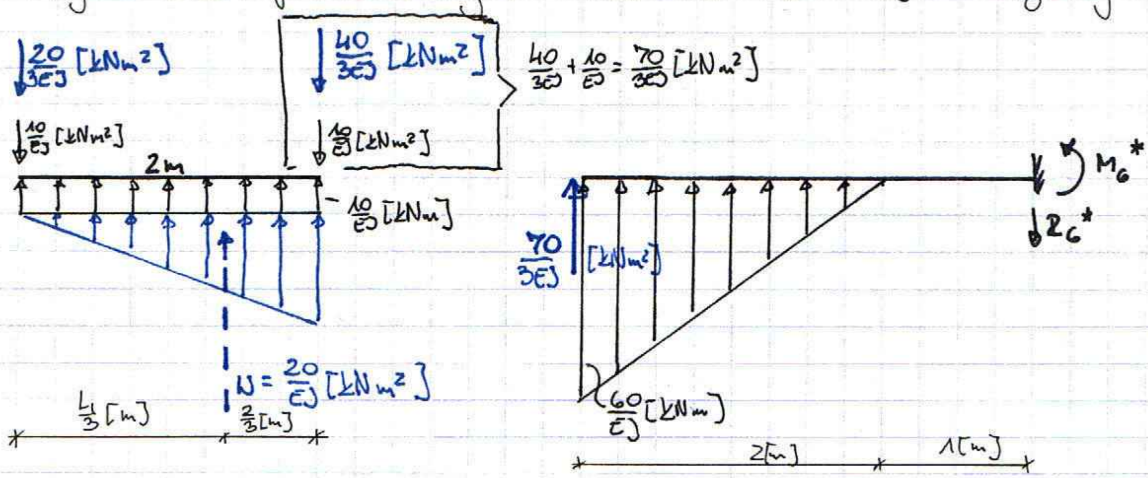
4° Obciążenie wtórne:



$$\delta_2 = M_2^{*L} = \frac{20}{EJ}[kNm] \cdot \frac{1}{2} \cdot 2[m] \cdot \frac{2}{3} \cdot 2[m] = \frac{80}{3EJ}[kNm^3]$$

$$\delta_2 = \frac{80}{3EJ}[kNm^3]$$

[W celu wyznaczenia poszukiwanych wartości M_6^* i R_6^* skorzystamy ze schematu pracy]



$$\delta_6 = M_6^* = 3[m] \cdot \frac{70}{3EJ}[kNm^2] + \frac{60}{EJ}[kNm] \cdot 2[m] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1[m] + \frac{2}{3} \cdot 2[m]\right) = \frac{70}{EJ}[kNm^3] + \frac{60 \cdot 7}{EJ \cdot 3}[kNm^3] =$$

$$= \frac{70}{EJ} + \frac{140}{EJ}[kNm^3] = \frac{210}{EJ}[kNm^3]$$

$$\delta_6 = \frac{210}{EJ}[kNm^3]$$

$$\varphi_6 = T_6^* = R_6^* = \frac{70}{3EJ}[kNm^2] + \frac{60}{EJ}[kNm] \cdot 2[m] \cdot \frac{1}{2} = \frac{70+180}{3EJ}[kNm^2] = \frac{250}{3EJ}[kNm^2]$$

$$\varphi_6 = \frac{250}{3EJ}[kNm^2]$$