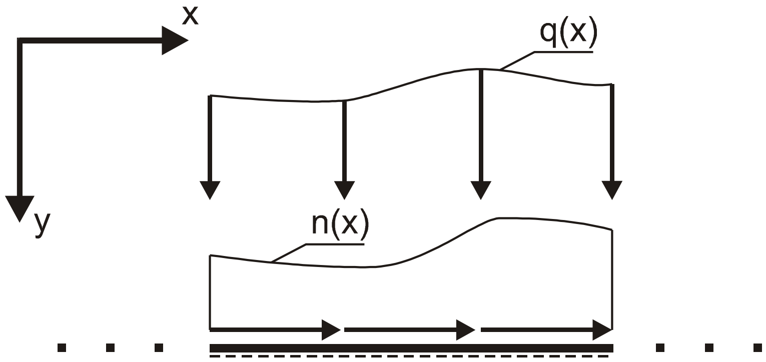
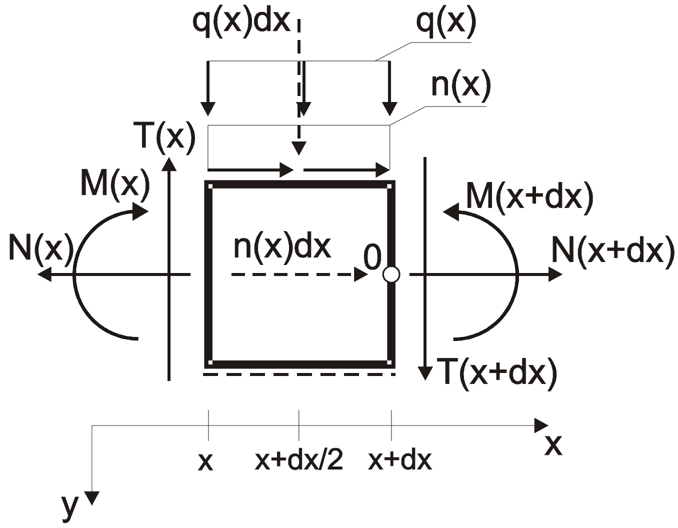
Siły wewnętrzne - związki różniczkowe

Weźmy dowolny fragment belki obciążony wzdłuż osi obciążeniem n(x) oraz poprzecznie obciążeniem q(x).



Na powyższym rysunku zwroty obciążeń są zgodne z dodatnimi zwrotami osi układu współrzędnych, w zadaniach tak skierowane obciążenia będziemy traktować jako dodatnie. Ze względu na to, że w mechanice budowli większość obciążeń pionowych pochodzi od sił grawitacyjnych, przyjmuje się zwrot osi y w dół.

Wytnijmy z takiego fragmentu element o długości dx, wpływ odciętych fragmentów zastępując siłami wewnętrznymi skierowanymi zgodnie z konwencją znaków sił wewnętrznych (na rysunku przedstawiono dodatnie zwroty). Można przyjąć, że na długości tego elementu obciążenia zewnętrzne mają wartość stałą. Siły wewnętrzne, podobnie jak obciążenie, są w tym przypadku funkcjami współrzędnej x.



Liniami przerywanymi zostały oznaczone wektory wypadkowych obciążenia n(x) oraz q(x).

Zapiszmy równania równowagi tego elementu:

$$\begin{cases} \sum P_x = -N(x) + n(x)dx + N(x+dx) = 0 \\ \sum P_y = -T(x) + q(x)dx + T(x+dx) = 0 \\ \sum M_0 = M(x) + T(x)dx - q(x)dx\dfrac{dx}{2} - M(x+dx) = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że w ostatnim równaniu występuje składnik

$$q(x)\,dx\frac{dx}{2}=\frac{q(x)}{2}(dx)^2$$

który możemy pominąć ze względu na wyrażenie dx podniesione do kwadratu (potocznym językiem: pomnożenie dx przez dx jest równoważne z wzięciem bardzo małej części bardzo małej liczby, czyli pomijalnej bez narażenia się na błędy).

Przekształcenie równań równowagi:

$$\begin{cases} n(x)dx=N(x)-N(x+dx) \\ q(x)dx=T(x)-T(x+dx) \\ T(x)dx=M(x+dx)-M(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n(x)=-\dfrac{N(x+dx)-N(x)}{dx} \\ q(x)=-\dfrac{T(x+dx)-T(x)}{dx} \\ T(x)=\dfrac{M(x+dx)-M(x)}{dx} \end{cases}$$

Porównajmy równania z ostatniego układu ze wzorem na pochodną funkcji y(x).

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

Otrzymujemy stąd:

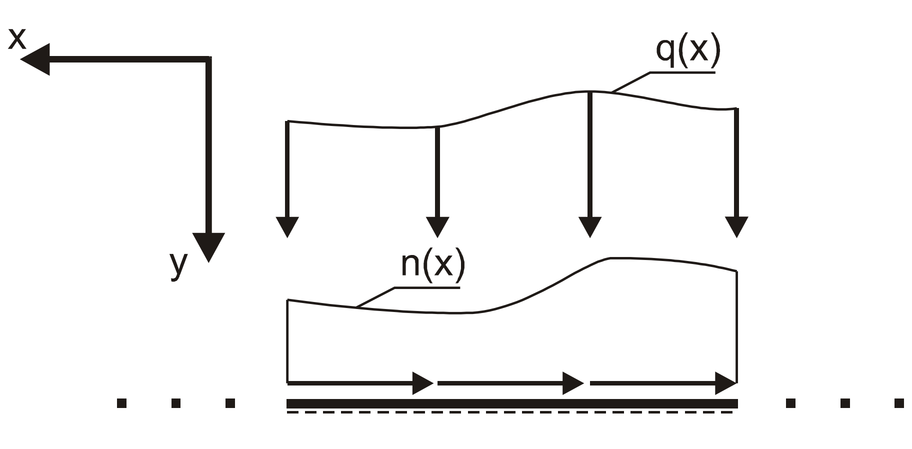
$$\begin{cases} n(x)=-N'(x) \\ q(x)=-T'(x) \\ T(x)=M'(x) \end{cases}$$

Powyższe wzory pokazują bezpośredni związek między dowolnym obciążeniem a siłami wewnętrznymi.

Scałkowanie równań daje związki najczęściej używane przy szukaniu sił wewnętrznych:

$$\begin{cases} N(x)=-\int n(x)dx \\ T(x)=-\int q(x)dx \\ M(x)=\int T(x)dx \end{cases}$$

Jeśli na samym początku przyjęlibyśmy przeciwny zwrot osi x (zwroty obciążenia pozostały niezmienione):



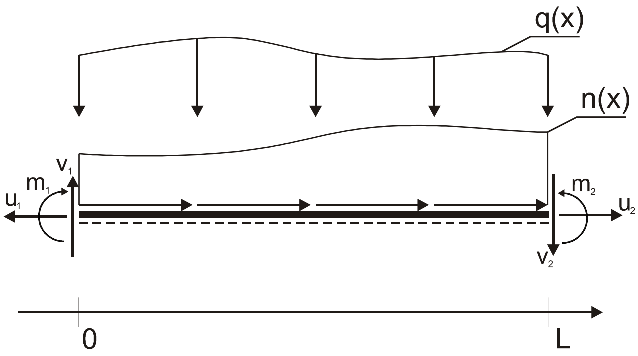
otrzymalibyśmy następujące związki:

$$\begin{cases} N(x)=\int n(x)\,dx \\ T(x)=\int q(x)\,dx \\ M(x)=-\int T(x)\,dx \end{cases}$$

Wynika stąd, że jeśli wyrazimy obciążenie działające na belkę w postaci funkcji różniczkowalnych (przynajmniej przedziałami), to wystarczy te funkcje scałkować żeby otrzymać wartości sił wewnętrznych w dowolnym punkcie.

Całki w ostatnim układzie równań są całkami nieoznaczonymi, stąd w rozwiązaniach pojawią się stałe, które wyznaczyć należy z warunków brzegowych. Najczęściej w tym celu szuka się wartości sił wewnętrznych na początku lub końcu belki, a w przypadku różnych wzorów funkcji obciążenia na różnych fragmentach belki – porównuje się wartości sił wewnętrznych w miejscu "styku" przedziałów.

W ogólnym przypadku może się zdarzyć, że koniec belki może być obciążony skupionymi siłami normalnymi i tnącymi oraz skupionym momentem zginającym.



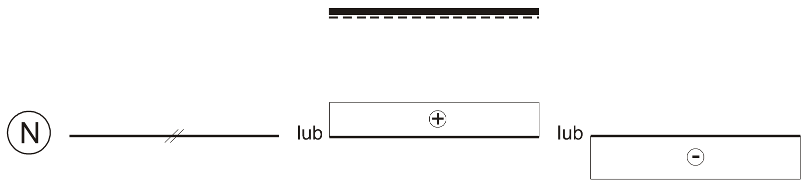
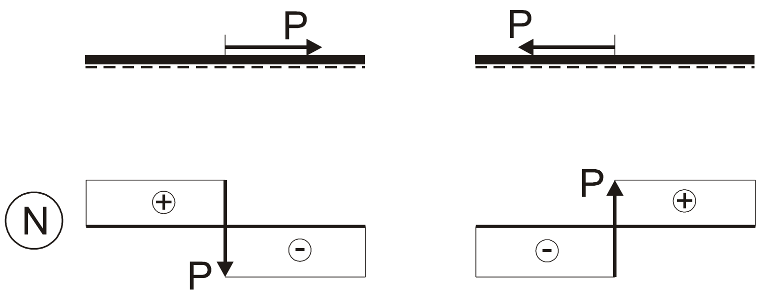
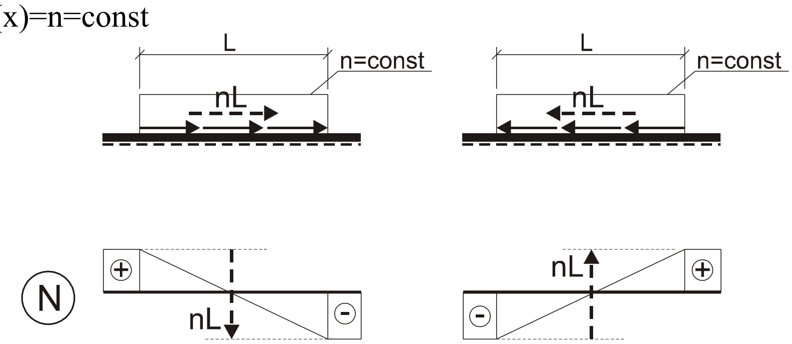
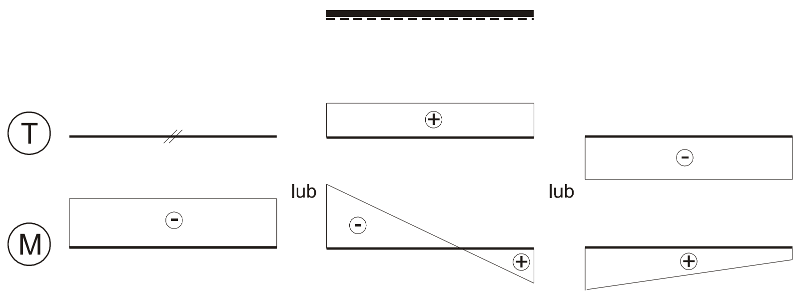
W łatwy sposób można wykazać, że niezależnie od wartości i rozkładu obciążenia q(x) oraz n(x), jeżeli belka pozostaje w równowadze, wartości sił wewnętrznych na początku i końcu belki są następujące:

$$\begin{aligned} N(0)&=u_1 \qquad & N(L)&=u_2 \\ T(0)&=v_1 \qquad & T(L)&=v_2 \\ M(0)&=m_1 \qquad & M(L)&=m_2 \end{aligned}$$

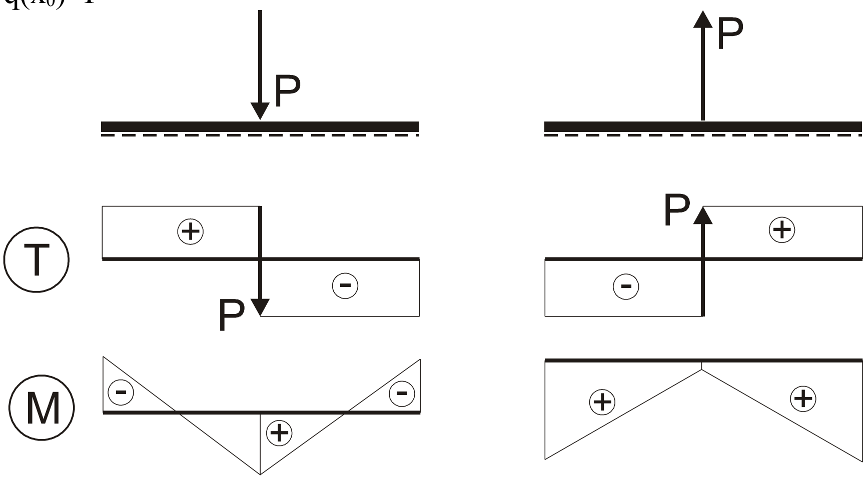
Należy pamiętać o tym, że na powyższym rysunku (jak również na poprzednich) przedstawione są dodatnie zwroty sił.

Bezpośrednie użycie związków różniczkowych rzadko daje rezultaty szybsze niż tradycyjne podejście. Jednak trzeba wiedzieć o tym, że związki różniczkowe połączone z tradycyjnym podejściem dają możliwość sprawdzenia, a nawet stworzenia przy obliczeniach zredukowanych do minimum, wykresów sił wewnętrznych.

Poniższe tabele pokazują, jak wyglądają siły wewnętrzne w zależności od obciążenia zewnętrznego. Związki te dają się łatwo pokazać, dlatego został do nich dodany tylko niezbędny komentarz bez podania wyprowadzeń.

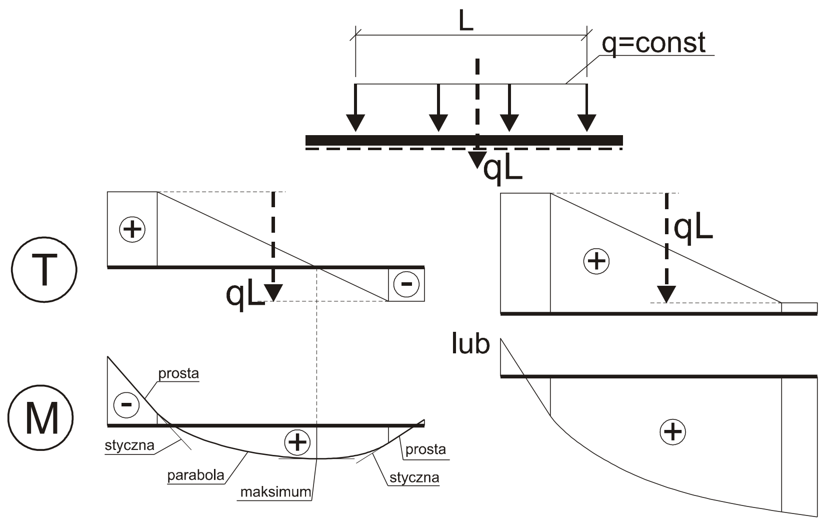
$n(x) = 0$ 	Gdy na belkę nie działa żadne obciążenie wzdłuż osi, wykres sił normalnych ma stałą wartość (dodatnią, ujemną, w szczególności równą 0).
$n(x_0) = P$ 	W danym punkcie przyłożona jest osiowa siła skupiona. Powoduje ona skok na wykresie sił normalnych w dół lub w górę zależnie od zwrotu (odpowiednio w prawo lub w lewo).
$n(x)=n=const$ 	Na odcinku długości L działa obciążenie stałe n. Jego wypadkowa ma wartość nL. Wykres sił normalnych jest na tym odcinku linią prostą, całkowity skok wykresu jest równy wypadkowej obciążenia.
$q(x)=0$ 	Nie ma obciążenia poprzecznego. Siły tnące mają stałą wartość (równą zero, dodatnią, ujemną). Momenty są odpowiednio funkcją stałą rosnącą, malejącą. Uwagi: 1. wartość siły tnącej decyduje tylko o charakterze wykresu momentów, a nie o wartościach. 2. na wykresie momentów wartości odkłada się przeciwnie do konwencji: „+” na dole, „-” na górze. Wynika stąd, że wykres jest zawsze po stronie rozciąganej.

$q(x_0)=P$



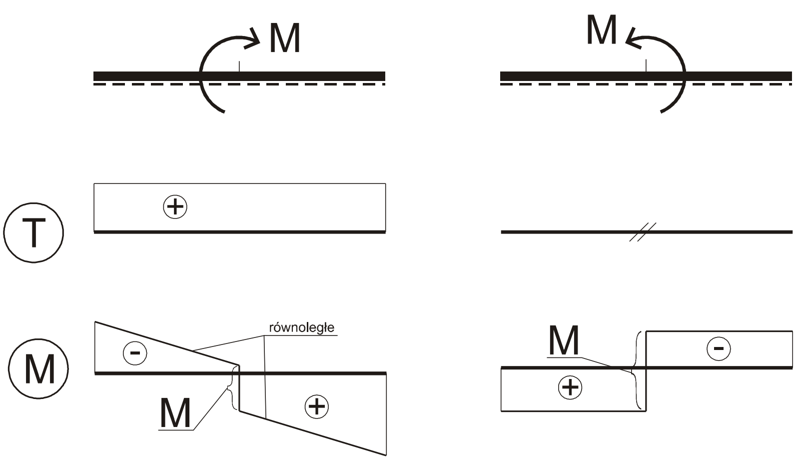
W danym punkcie przyłożona siła skupiona prostopadła do osi.
Na wykresie sił tnących pojawia się skok o wartość działającej siły.
W tym przypadku na lewo i prawo od siły nie ma rzadnych obciążeń, więc siły tnące są stałe. Idąc dalej, momenty są prostymi rosnącymi lub malejącymi zależnie od znaku siły tnącej.
Niezależnie od znaku siły tnącej na wykresie momentów zawsze pojawia się ostre załamanie, „zgodne” z działaniem siły skupionej.

$q(x)=q=const$



Obciążenie stałe rozłożone na długości L. Wykres sił tnących zmienia się liniowo, całkowita zmiana ma wartość wypadkowej obciążenia. Wykres momentów ma kształt paraboli 2. stopnia, wybrzuszonej „zgodnie z działaniem obciążenia”.
W miejscu, gdzie zerują się siły tnące, momenty mają swoje maksimum (minimum).
Na granicy belki bez obciążenia i z obciążeniem stałym wykres momentów stycznie przechodzi z linii prostej w parabolę.
Parabola jest wybrzuszona tak, jakby „poddawała” się działaniu obciążenia.

$q(x)=0$, moment skupiony



Moment skupiony przyłożony w danym punkcie.
Takie obciążenie nie wpływa na kształt wykresu sił tnących.
Jest to jedyna sytuacja, w której na wykresie momentów zginających pojawia się skok o wartość momentu skupionego.

Uwaga: powyższa tabela nie wyczerpuje wszystkich możliwości obciążenia i wszystkich wariantów wykresów sił wewnętrznych. Pokazany jest jedynie charakter wykresy zależnie od obciążenia.

Podsumowanie:

Siły normalne:

- wykres stały przy braku obciążenia osiowego
- skoki wykresu tylko przy obciążeniu skupionym
- przy stałym obciążeniu ciągłym wykres liniowy

Siły tnące:

- wykres stały przy braku obciążenia poprzecznego
- skoki wykresu tylko przy obciążeniu skupionym
- przy stałym obciążeniu ciągłym wykres liniowy

Momenty zginające:

- wykres stały przy zerowych siłach tnących
- wykres liniowy przy stałej sile tnącej
- wykres paraboliczny przy liniowo zmiennej sile tnącej
- ekstrema przy zerowych siłach tnących
- załamania tylko w miejscach przyłożenia sił skupionych (w innych miejscach – styczne przejście)
- skoki tylko przy momentach skupionych
- wykres momentów „poddaje się” działającemu obciążeniu