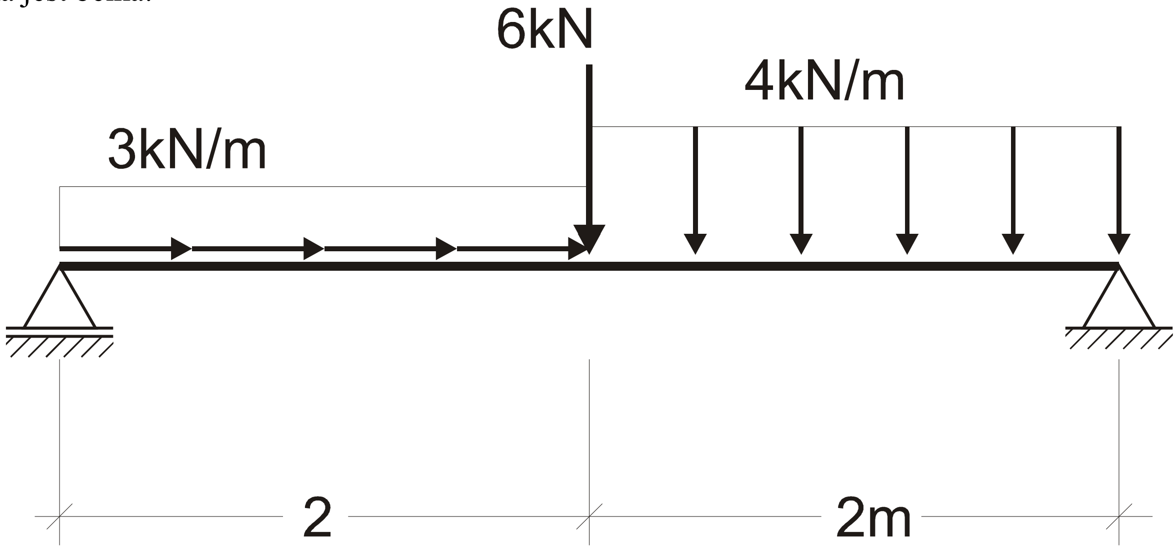
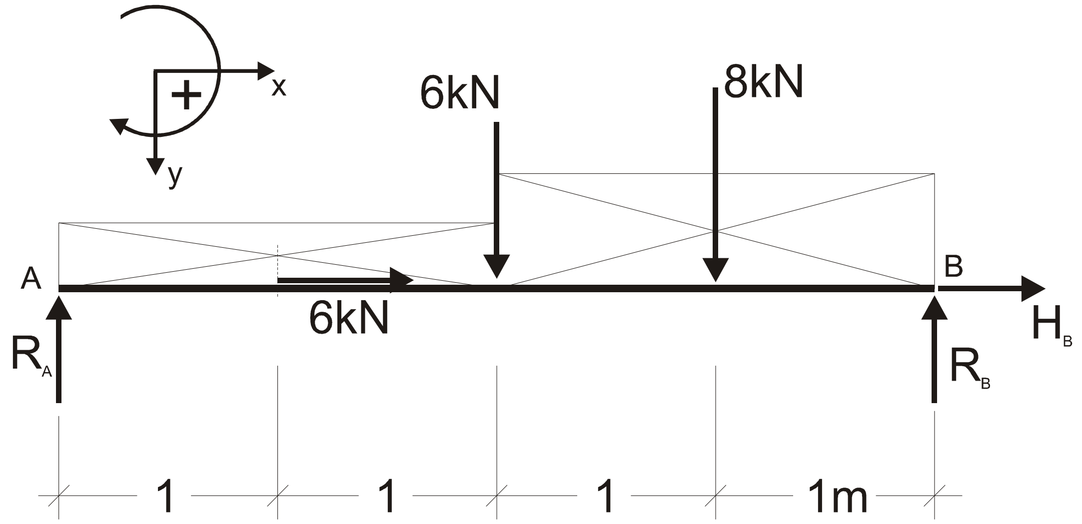
# Przykład 1.

Dana jest belka:




Podać wykresy NTM.

Niezależnie od sposobu rozwiązywania zadania, zacząć należy od zastąpienia podpór reakcjami. Na czas obliczania reakcji można zastąpić obciążenie ciągłe wypadkowymi przyłożonymi w środkach ciężkości "pól obciążenia".




Zapiszmy i rozwiążmy równania równowagi (dodatnie zwroty jak na powyższym rysunku):

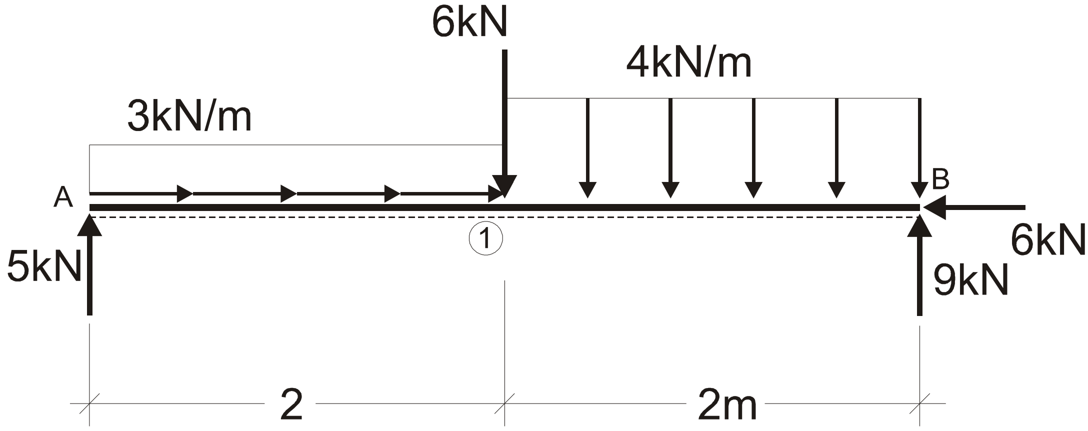
$$\begin{cases} \sum P_x = 6 + H_B = 0 \\ \sum M_A = 6*2 + 8*3 - R_B*4 = 0 \\ \sum M_B = R_A*4 - 6*2 - 8*1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = -6\ kN \\ R_B = 9\ kN \\ R_A = 5\ kN \end{cases}$$

*spr.*

$$\sum P_y = -R_A + 6 + 8 - R_B = -5 + 6 + 8 - 9 = 0 \quad OK$$

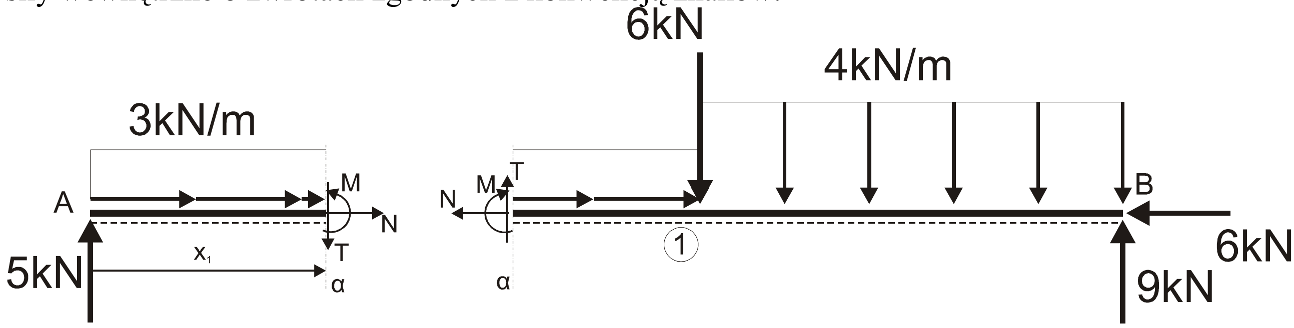
Ostatecznie otrzymujemy belkę, na którą działa zrównoważony układ sił. Do obliczeń momentów potrzebne jest przyjęcie spodu belki, a także oznaczenie miejsc, w których zmienia się charakter obciążenia:




I sposób obliczenia sił wewnętrznych – klasyczne podejście.

Przedział A-1

Rozetnijmy belkę w dowolnym punkcie przedziału A-1 przekrojem α i wprowadźmy w tym miejscu siły wewnętrzne o zwrotach zgodnych z konwencją znaków:




Zmienna $x_1$ zmienia swoje wartości od 0 (pkt. A) do 2m (pkt. 1).

W celu wyznaczenia wartości sił N, T, M zapiszmy równania równowagi lewej strony przekroju (dodatnie zwroty j.w.):

$$\begin{cases} \sum P_{x_1} = 3x_1 + N = 0 \\ \sum P_y = -5 + T = 0 \\ \sum M_\alpha = 5x_1 - M = 0 \end{cases}$$

Położenie przekroju jest zmienne, określone współrzędną $x_1$, więc siły wewnętrzne są jej funkcjami:

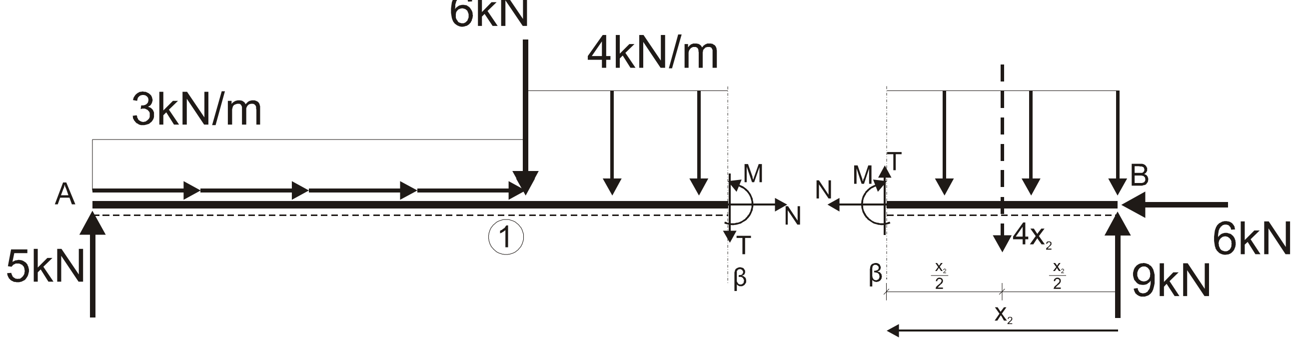
$$\begin{cases} N(x_1) = -3x_1 \ [kN] \\ T(x_1) = 5 \ [kN] \\ M(x_1) = 5x_1 \ [kNm] \\ x_1 \in \langle 0,2 \rangle \end{cases}$$

Wyznaczmy wartości sił wewnętrznych na końcach przedziału:

$$\begin{cases} N(x_1=0) = -3*0 = 0 \qquad N(x_1=2) = -3*2 = -6\ kN \\ T(x_1=0) = T(x_1=2) = 5\ kN \\ M(x_1=0) = 5*0 = 0 \qquad M(x_1=2) = 5*2 = 10\ kNm \end{cases}$$

Przedział B-1

Rozetnijmy belkę w dowolnym punkcie przedziału B-1 przekrojem β i wprowadźmy w tym miejscu siły wewnętrzne o zwrotach zgodnych z konwencją znaków:




Zmienna $x_1$ zmienia swoje wartości od 0 (pkt. B) do 2m (pkt. 1).
W celu wyznaczenia wartości sił N, T, M zapiszmy równania równowagi prawej strony przekroju (dodatnie zwroty j.w.):

$$\begin{cases} \sum P_{x_1} = -N - 6 = 0 \\ \sum P_y = -T + 4 * x_2 - 9 = 0 \\ \sum M_\beta = M + 4 * x_2 \dfrac{x_2}{2} - 9 * x_2 = 0 \end{cases}$$

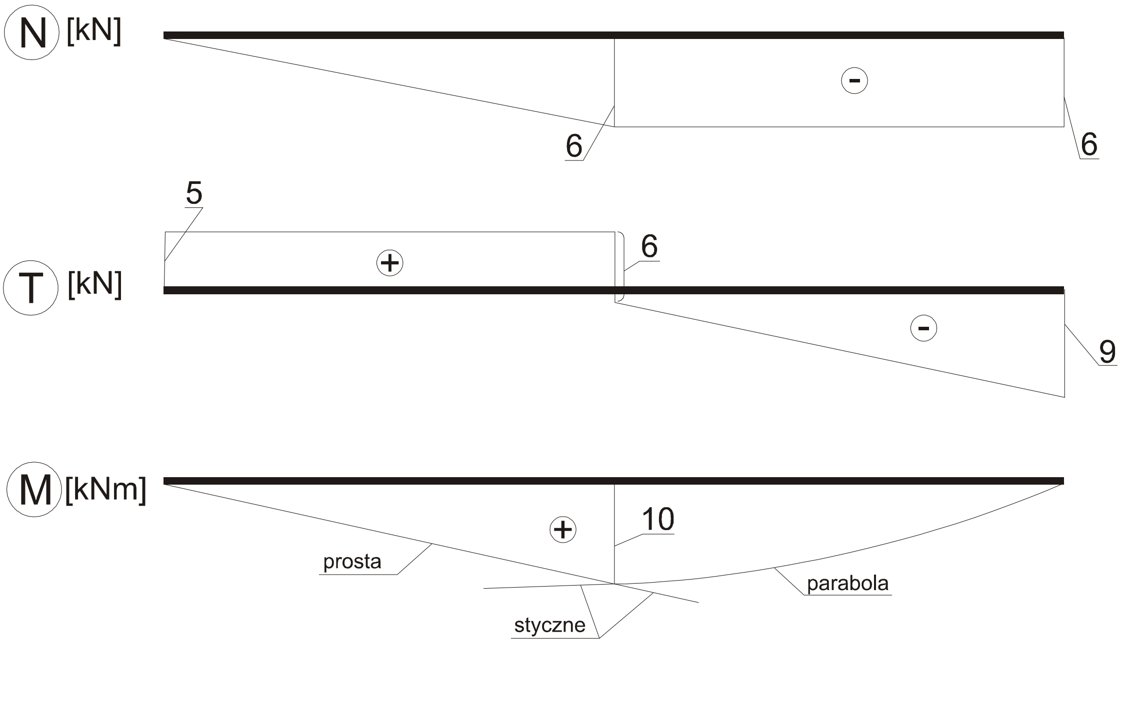
Położenie przekroju jest zmienne, określone współrzędną $x_2$, więc siły wewnętrzne są jej funkcjami:

$$\begin{cases} N(x_2) = -6 \ \ [kN] \\ T(x_2) = 4\mathrm{x}_2 - 9 \ \ [kN] \\ M(x_2) = -2x_2^{\ 2} + 9\mathrm{x}_2 \ \ [kNm] \\ x_2 \in \langle 0,2 \rangle \end{cases}$$

Wyznaczmy wartości sił wewnętrznych na końcach przedziału:

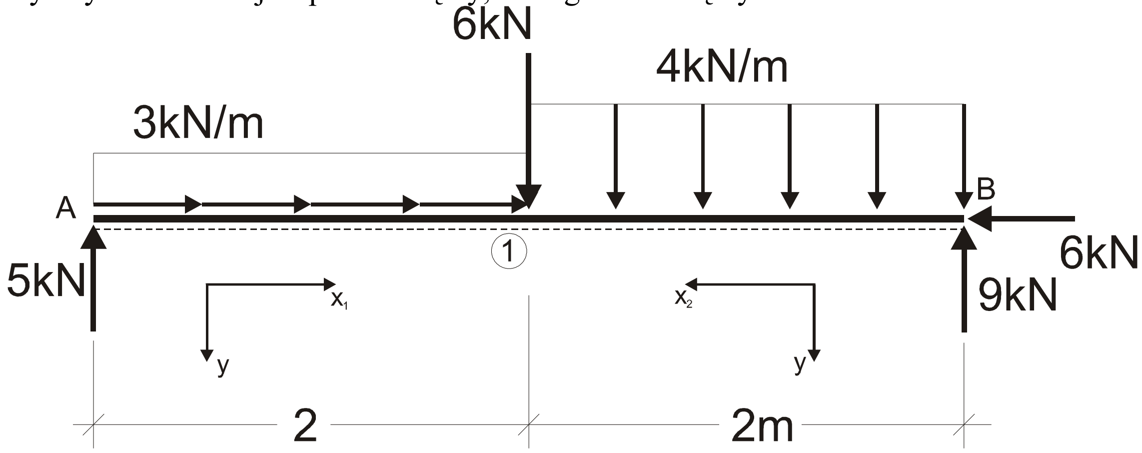
$$\begin{cases} N(x_2=0) = N(x_2=2) = -6 \ kN \\ T(x_2=0) = -9 \ kN \qquad T(x_2=2) = -1 \ kN \\ M(x_2=0) = 0 \qquad M(x_1=2) = 10 \ kNm \end{cases}$$

Na podstawie tych równań można narysować wykresy sił wewnętrznych:



II sposób obliczenia sił wewnętrznych – związki różniczkowe.

Rozpoczynamy od swobodnej belki, na którą działają równoważące się siły. Wprowadzimy dwa układy współrzędnych $x_1y$ i $x_2y$ odpowiednio do przedziału A-1 oraz B-1. Istotne jest to, że pierwszy z tych układów jest prawoskrętny, a drugi lewoskrętny.




Przedział A-1.

Układ współrzędnych prawoskrętny, obowiązujące związki różniczkowe:

$$\begin{cases} N(x) = -\int n(x)\,dx \\ T(x) = -\int q(x)\,dx \\ M(x) = \int T(x)\,dx \end{cases}$$

Określmy funkcje obciążeń:

$$n(x_1) = 3\ kN/m$$
$$q(x_1) = 0$$

Wartości sił wewnętrznych w punkcie A posłużą jako warunki brzegowe funkcji sił wewnętrznych niezbędne do wyznaczenia stałych:

$$N(x_1 = 0) = 0$$
$$T(x_1 = 0) = 5\ kN$$
$$M(x_1 = 0) = 0$$

Wyznaczenie funkcji sił normalnych:

$$N(x_1) = -\int n(x_1)\,dx_1 = -\int 3\,dx_1 = -3x_1 + C_1$$
$$N(x_1) = -3x_1 + C_1 \wedge N(x_1 = 0) = 0 \ \Rightarrow\ -3*0 + C_1 = 0 \ \Rightarrow\ C_1 = 0$$
$$N(x_1) = -3x_1\ [kN]$$

Wyznaczenie funkcji sił tnących:

$$T(x_1) = -\int q(x_1)\,dx_1 = -\int 0\,dx_1 = C_2$$
$$T(x_1) = C_2 \wedge T(x_1 = 0) = 5 \ \Rightarrow\ C_2 = 5$$
$$T(x_1) = 5\ [kN]$$

Wyznaczenie funkcji momentów zginających:

$$M(x_1) = \int T(x_1)\,dx_1 = \int 5\,dx_1 = 5x_1 + C_3$$
$$M(x_1) = 5x_1 + C_3 \wedge M(x_1 = 0) = 0 \ \Rightarrow\ 5*0 + C_3 = 0 \ \Rightarrow\ C_3 = 0$$
$$M(x_1) = 5x_1\ [kN]$$

Przedział B-1.
Układ współrzędnych lewoskrętny, obowiązujące związki różniczkowe:

$$\begin{cases} N(x) = \int n(x)\,dx \\ T(x) = \int q(x)\,dx \\ M(x) = -\int T(x)\,dx \end{cases}$$

Określmy funkcje obciążeń:

$$n(x_2) = 0$$
$$q(x_2) = 4\ kN/m$$

Wartości sił wewnętrznych w punkcie B posłużą jako warunki brzegowe funkcji sił wewnętrznych niezbędne do wyznaczenia stałych:

$$N(x_2=0) = -6\ kN$$
$$T(x_2=0) = -9\ kN$$
$$M(x_2=0) = 0$$

Wyznaczenie funkcji sił normalnych:

$$N(x_2) = \int n(x_2)\,dx_2 = \int 0\,dx_2 = C_4$$
$$N(x_2) = C_4 \wedge N(x_2=0) = -6 \Rightarrow C_4 = -6$$
$$N(x_2) = -6\,[kN]$$

Wyznaczenie funkcji sił tnących:

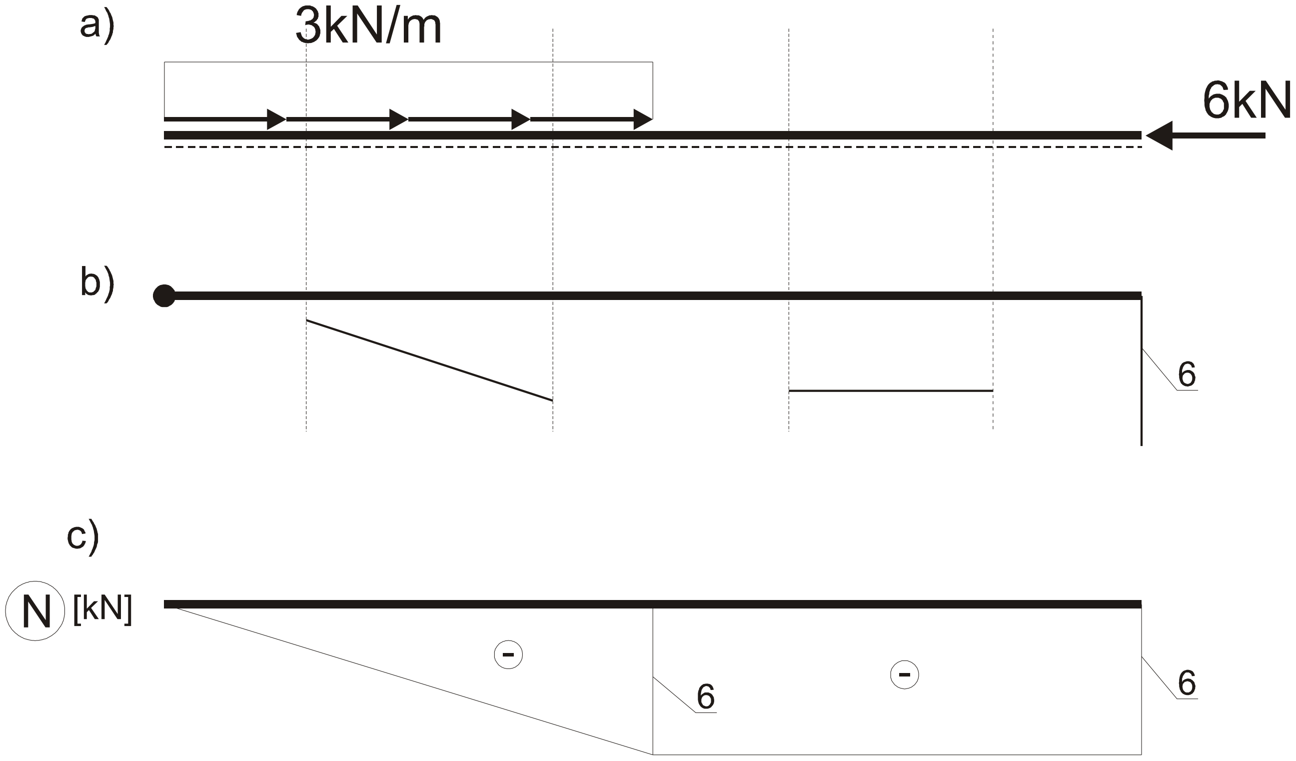
$$T(x_2) = \int q(x_2)\,dx_2 = \int 4\,dx_2 = 4\mathrm{x}_2 + C_5$$
$$T(x_2) = 4\mathrm{x}_2 + C_5 \wedge T(x_2=0) = -9 \Rightarrow 4*0 + C_5 = -9 \Rightarrow C_5 = -9$$
$$T(x_2) = 4\mathrm{x}_2 - 9\,[kN]$$

Wyznaczenie funkcji momentów zginających:

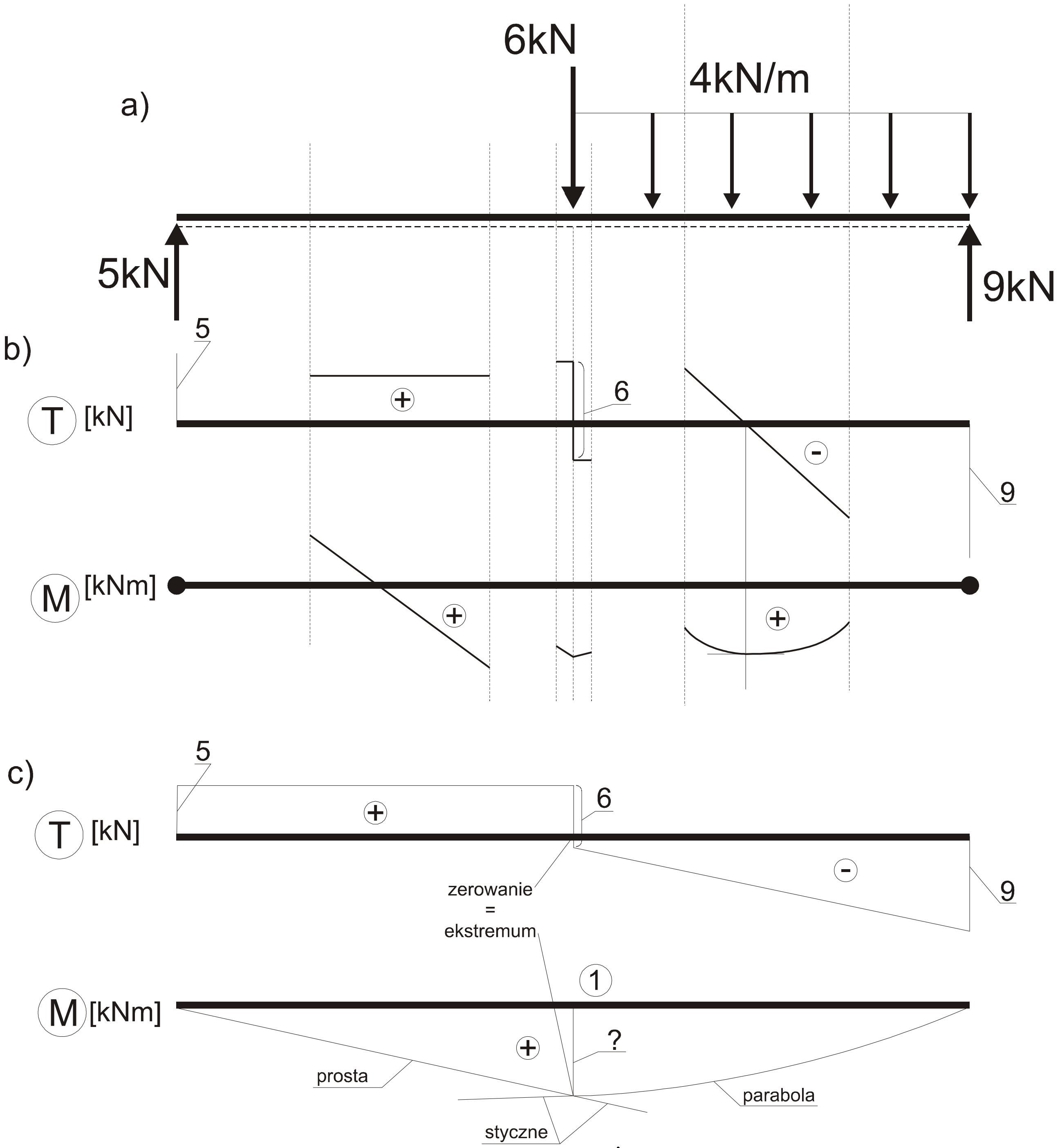
$$M(x_2) = -\int M(x_2)\,dx_2 = -\int (4\mathrm{x}_2 - 9)\,dx_2 = -2x_2^2 + 9\mathrm{x}_2 + C_6$$
$$M(x_2) = -2x_2^2 + 9\mathrm{x}_2 + C_6 \wedge M(x_2=0) = 0 \Rightarrow -2*0^2 + 9*0 + C_6 = 0 \Rightarrow C_6 = 0$$
$$M(x_2) = -2x_2^2 + 9\mathrm{x}_2\,[kN]$$

Jak widać, uzyskane funkcje obciążeń są identyczne jak poprzednim rozwiązaniu, wykresy zostaną tym razem pominięte.

III sposób - “przewidywanie” wykresu.
Obciążenie osiowe:
a) bierzemy pod uwagę tylko obciążenia działające wzdłuż osi
b) odczytujemy wartości na końcach belki. Analizujemy obciążenie na długości belki: tam, gdzie mamy do czynienia z obciążeniem stałym działającym “w prawo”, wykres będzie funkcją liniową malejącą. Tam, gdzie obciążenia nie ma, wykres będzie stały.
c) na długości nie ma obciążeń skupionych, więc nie będzie skoków wykresu. Otrzymany wykres pokrywa się ze wcześniejszymi rozwiązaniami.




Siły tnące i momenty zginające (od obciążenia poprzecznego):
a) bierzemy pod uwagę tylko obciążenia działające poprzecznie do osi
b) zaznaczamy na wykresach wartości sił wewnętrznych na końcach belki. Analizujemy obciążenie na długości belki: tam, gdzie obciążenia nie ma, wykres sił tnących ma wartość stałą, a momenty są funkcją liniową. W miejscu przyłożenia obciążenia skupionego wykres sił tnących ma skok o wartość obciążenia, a wykres momentów ostre zagięcie. Tam, gdzie obciążenie ma stałą wartość wykres sił tnących jest funkcją liniową, a wykres momentów jest parabolą. W miejscu zerowania sił tnących wykres momentów ma ekstremum.
c) tworzymy ostateczne wykresy pamiętając o tym, że nie mogą na nich występować dodatkowe skoki. Siła tnąca zeruje się tylko w jednym miejscu na długości, stąd tylko jedno ekstremum momentów. W przedziale, gdzie występuje obciążenie stałe nie ma zerowych sił tnących, dlatego parabola nie ma maksimum lokalnego.




Ostatnią „zagadką” jest wartość momentów w punkcie 1. Żeby ją wyznaczyć wystarczy zsumować momenty od sił działających z lewej lub prawej strony przekroju. Nie trzeba w tym miejscu zastanawiać się nad konwencją znaków, znak momentów wynika z wykresu.

$$\sum M_1^L = 5*2 = 10\,kNm$$

$$\sum M_1^P = 9*2 - 8*1 = 10\,kNm$$

Jak widać, w miejsce „?” należy stawić 10 kNm.

Wszystkie 3 metody dały jednakowe rezultaty. Pierwszą z nich (klasyczne podejście) stosować jest najłatwiej, po prostu trzeba zapisać równania równowagi rozciętych części. Drugie podejście (związki różniczkowe) pozwala wyznaczyć siły wewnętrzne od nietypowego obciążenia (np. opisanego funkcją sinus). Natomiast trzeci wariant wymaga wprawy, ale po jakimś czasie daje szybkie rezultaty, niezbędne przede wszystkim w późniejszych przedmiotach, jak mechanika budowli (układy statycznie niewyznaczalne).