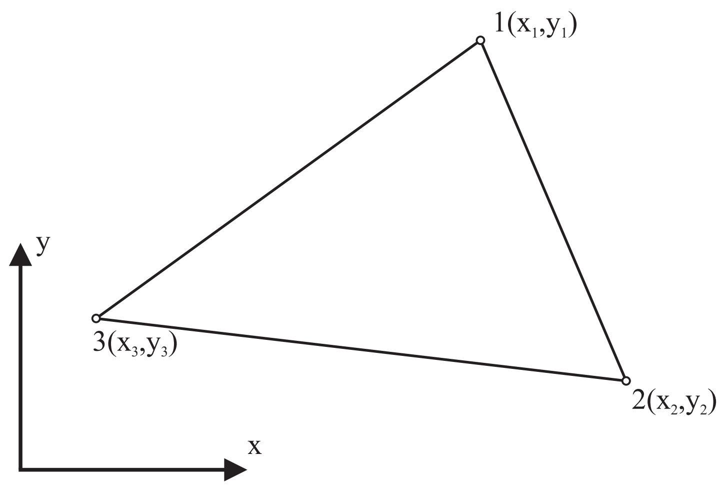
Charakterystyki geometryczne trójkąta o dowolnych wierzchołkach

Stanisław Burzyński

16 marca 2009r.

1 Wstęp

Przedmiotem rozważań jest wyprowadzenie wzorów na geometryczne momenty bezwładności dla trójkąta o dowolnych wierzchołkach (rys.1). Użyte zostaną w tym celu współrzędne barycentryczne[1].



Rysunek 1:

W układzie kartezjańskim geometryczne momenty bezwładności definiuje się jako całki powierzchniowe:

Moment bezwładności względem osi x: $$I_x = \iint\limits_A y^2 dA \tag{1}$$

Moment bezwładności względem osi y: $$I_y = \iint\limits_A x^2 dA \tag{2}$$

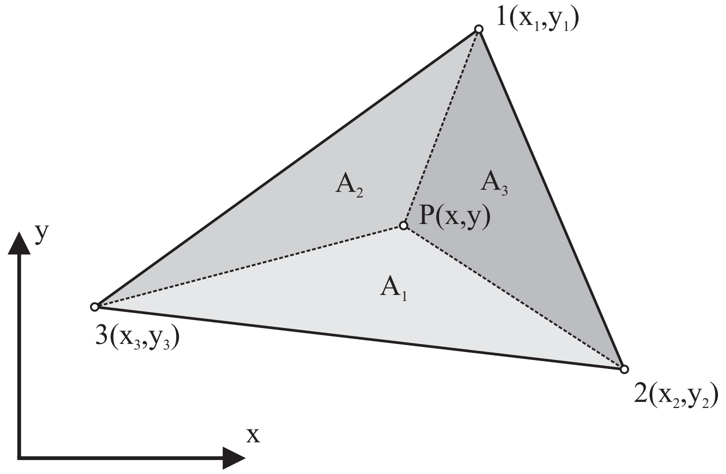
Dewiacyjny moment bezwładności: $$I_{xy} = \iint\limits_A xy dA \tag{3}$$

[1] W literaturze nazywane także współrzędnymi powierzchniowymi

2 Współrzędne barycentryczne

W kartezjańskim układzie współrzędnych każdy punkt na płaszczyźnie lokalizowany jest przy pomocy pary liczb (x, y), które są odpowiednio odległościami punktu od osi y oraz x. Natomiast we współrzędnych barycentrycznych położenie punktów opisywane jest w odniesieniu do współrzędnych pewnego sympleksu[2] - w naszym przypadku: trójkąta.

W celu ich zdefiniowania łączymy dowolny punkt wewnątrz trójkąta z wierzchołkami (rys.2). Uzyskujemy w ten sposób trzy pola powierzchni - A_1, A_2, A_3.



Rysunek 2: Podział trójkąta na pola

Ilorazy tych pól z polem całkowitym trójkąta ($A = A_1 + A_2 + A_3$) będą stanowić bezwymiarowe współrzędne, jednoznacznie lokalizujące wybrany punkt. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \tag{4}$$

$$\xi_2 = \frac{A_2}{A} \tag{5}$$

$$\xi_3 = \frac{A_3}{A} \tag{6}$$

Zatem każdy punkt ma przypisane 3 współrzędne (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (rys.3).

Związek między współrzędnymi barycentrycznymi a kartezjańskimi ma postać:

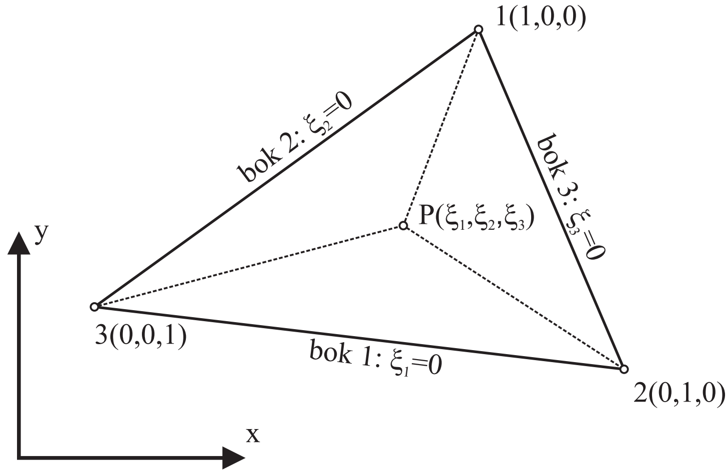
$$x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \tag{7}$$

$$y = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 \tag{8}$$

a po uwzględnieniu zależności $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ i eliminacji zmiennej ξ_3:

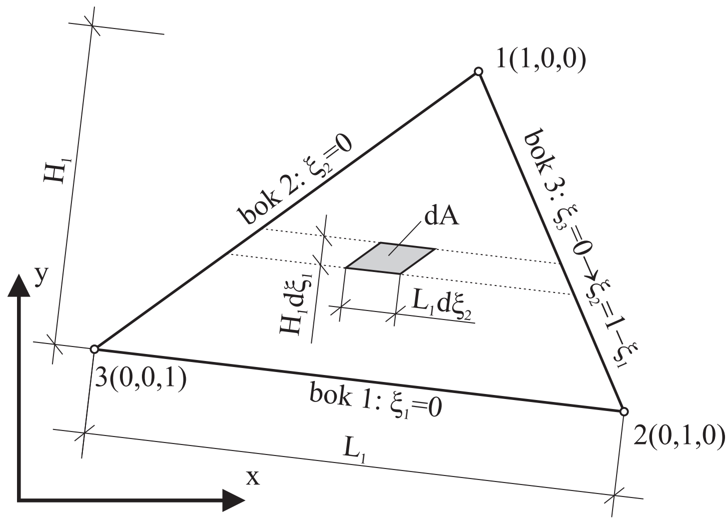
$$\begin{aligned} x &= x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3(1 - \xi_1 - \xi_2) \\ y &= y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3(1 - \xi_1 - \xi_2) \end{aligned} \tag{9}$$

[2] W matematyce zbiór wypukły będący uogólnieniem trójkąta i czworościanu na dowolną przestrzeń liniową.



Rysunek 3: Współrzędne barycentryczne punktów charakterystycznych

Pokażemy teraz wielkości niezbędne do przeprowadzenia całkowania po powierzchni trójkąta. Jako zmienne niezależne będziemy traktować ξ_1 oraz ξ_2. Reprezentację różniczki pola dA względem tych zmiennych przedstawiono na rys.4. Przyjmujemy, że L_1 jest długością boku 1 a H_1 jest odpowiadającą mu



Rysunek 4: Różniczka pola we współrzędnych barycentrycznych

wysokością trójkąta. Dzielimy trójkąt na paski o wysokości $H_1 d\xi_1$ równoległe do boku 1. Na takim pasku zmienna ξ_1 ma stałą wartość. Wartości te dla kolejnych pasków zmieniają się od 0 do 1. Natomiast zmienna ξ_2 w obrębie pojedynczego paska przyjmuje wartości od 0 na boku 2 do $1 - \xi_1$ na boku 3. W takim pasku wyróżniamy równoległobok o podstawie długości $L_1 d\xi_1$. Jest on różniczką pola.

$$dA = H_1 d\xi_1 \cdot L_1 d\xi_2 = 2A d\xi_1 d\xi_2 \tag{10}$$

Uwzględniając dodatkowo zależność (9) otrzymujemy wzór na całkę po obszarze trójkąta:

$$\iint_A f(x,y)dA = 2A\int_0^1\int_0^{1-\xi_1} f(x(\xi_1,\xi_2),y(\xi_1,\xi_2))d\xi_2 d\xi_1 \tag{11}$$

gdzie

$$\begin{aligned} x(\xi_1,\xi_2) &= x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3(1-\xi_1-\xi_2)\\ y(\xi_1,\xi_2) &= y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3(1-\xi_1-\xi_2)\end{aligned}$$

3 Momenty bezwładności

Możemy przystąpić do wyprowadzenia wzorów na momenty bezwładności. Zgodnie z definicją (3) oraz wzorem (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_x = \iint_A y^2 dA = \\ = 2A\int_0^1\int_0^{1-\xi_1}(y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3(1-\xi_1-\xi_2))^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ = \frac{A}{6}\left[y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3\right] \quad (12)\end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy I_y oraz I_{xy}. Otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$I_x = \frac{A}{6}\left[y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3\right] \tag{13}$$

$$I_y = \frac{A}{6}\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right] \tag{14}$$

$$I_{xy} = \frac{A}{12}\left[2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2\right] \tag{15}$$

Powyższe równania można przekształcić do postaci:

$$I_x = \frac{A}{12}\left[(y_1+y_2)^2+(y_2+y_3)^2+(y_1+y_3)^2\right] \tag{16}$$

$$I_y = \frac{A}{12}\left[(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+x_3)^2\right] \tag{17}$$

$$I_{xy} = \frac{A}{24}\left[(x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)\right], \tag{18}$$

gdzie

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right] \tag{19}$$

jest polem trójkąta.

Literatura

[1] Bielewicz E.: *Wytrzymałość materiałów*, Gdańsk, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2006

[2] Rakowski G., Kacprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Warszawa, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005