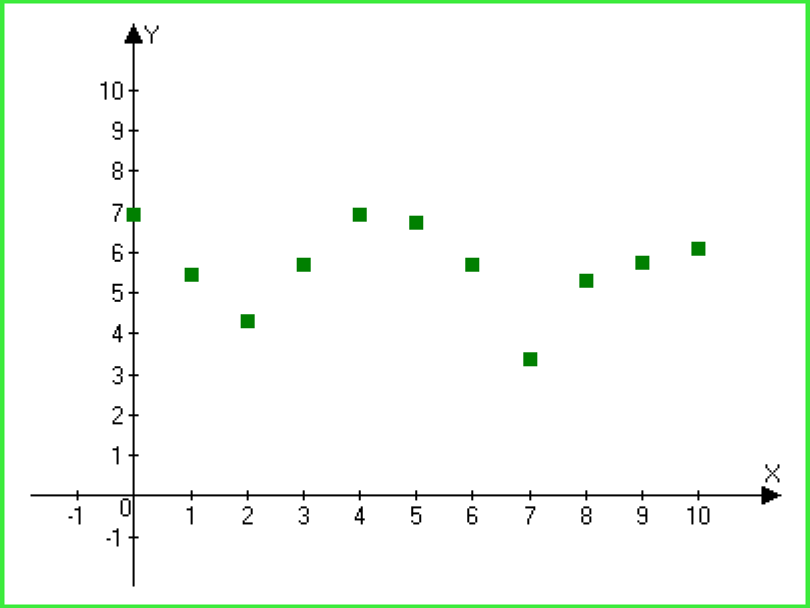
interpolacja funkcji

przygotował:
Stanisław Burzyński
Koło Mechaniki Budowli
WILiŚ PG

punkt wyjścia

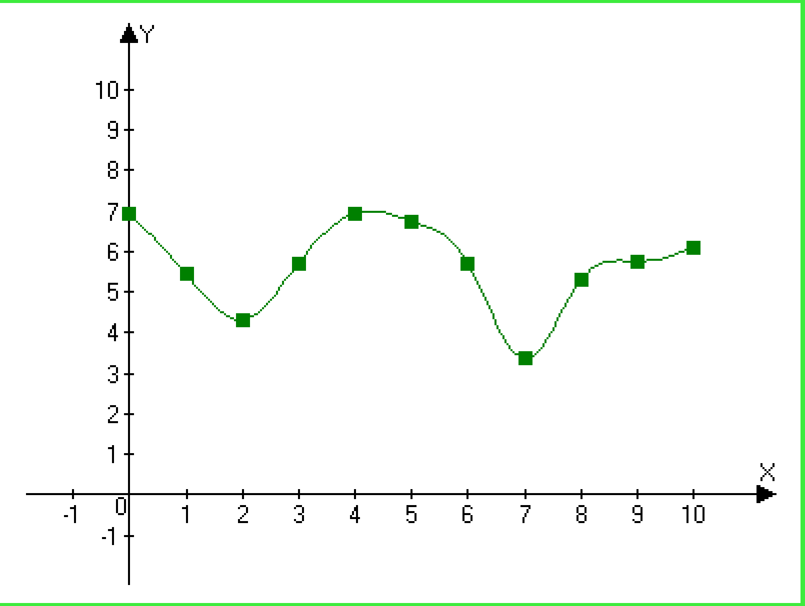
Zbiór n punktów (x_i, y_i)



cel

Funkcja y=f(x) taka, że

$$y_i = f(x_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$



interpolacja wielomianowa

wielomian klasy Π_n $\quad p(x)=a_0+a_1 x+\ldots+a_n x^n \quad a_n\neq 0$

twierdzenie

Jeśli liczby x_0, $x_1,\ldots,x_n$ są parami różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian $p_n\in\Pi_n$ taki, że

$$p_n(x_i)=y_i \quad (0\leqslant i\leqslant n)$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

pozwala odnaleźć wielomian interpolujący dane punkty.

ilorazy różnicowe

Przekształcamy postać wielomianu do wzoru Newtona:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) \qquad q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenie:

$$c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Jest to *iloraz różnicowy rzędu k* dla funkcji *f* i danych węzłów.

Wyrażenia ilorazów różnicowych:

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

ilorazy różnicowe – algorytm

Przykład dla 4 punktów.

wielkości dane

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Uzupełniamy tablicę używając wzoru:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

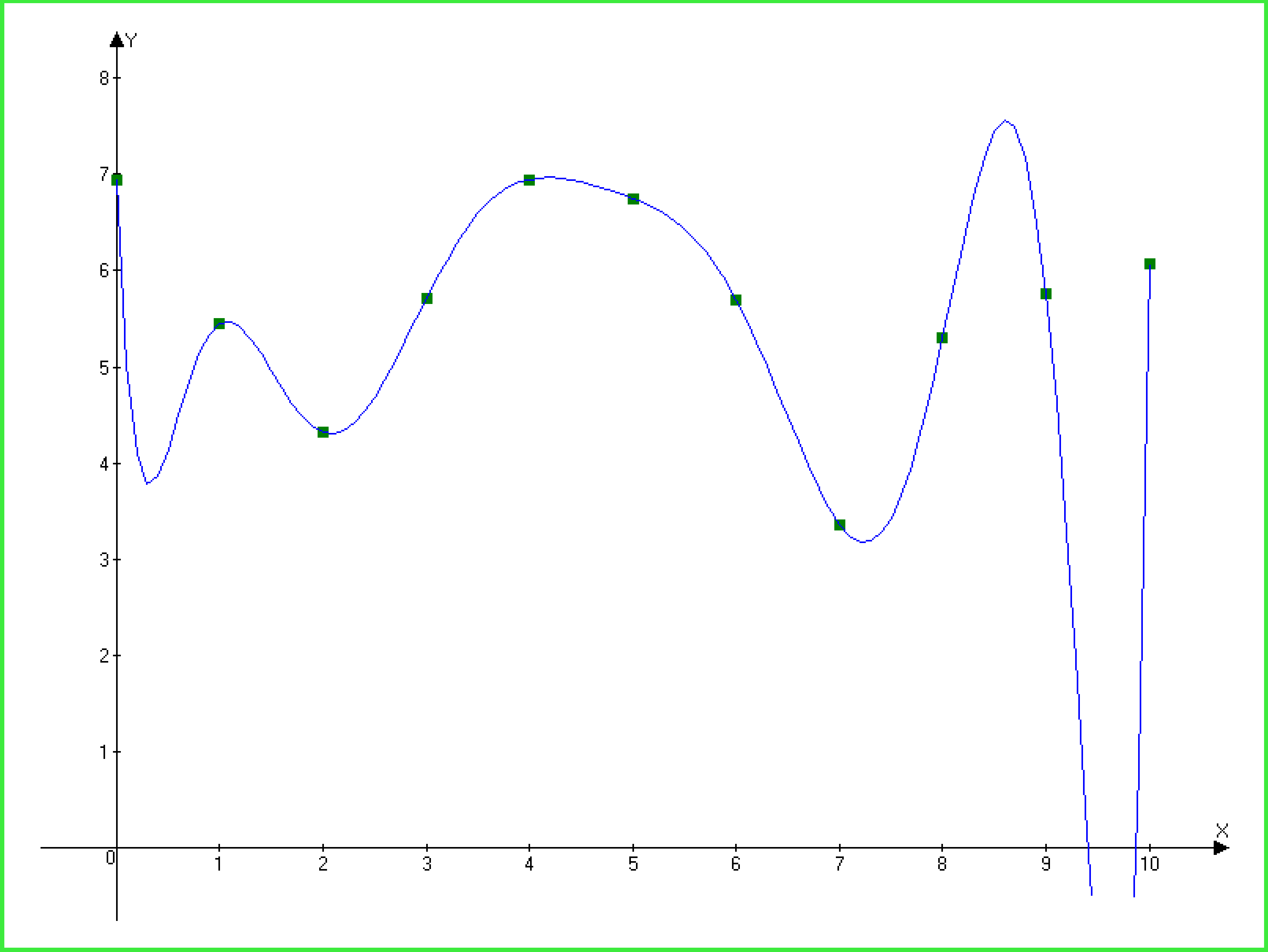
Z tablicy odczytujemy wartości

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

i wstawiamy je do wzoru:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) \qquad q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Rezultat interpolacji wielomianowej z wykorzystaniem ilorazów różnicowych dla 11 punktów.



funkcje sklejane

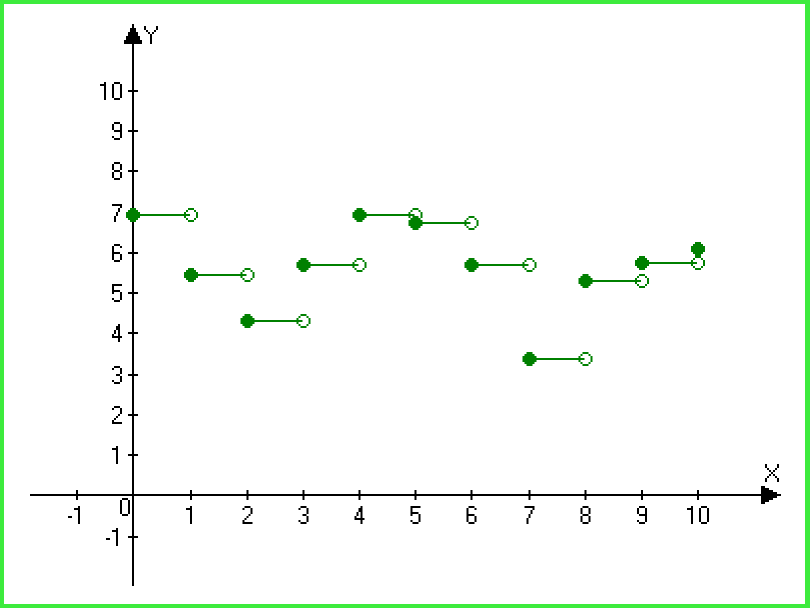
Ustalamy n+1 wezłów $(t_i, s_i) \quad i=0,\ldots,n$.

Funkcję *s=S(t)* nazywamy *funkcją sklejaną stopnia k*, jeśli:

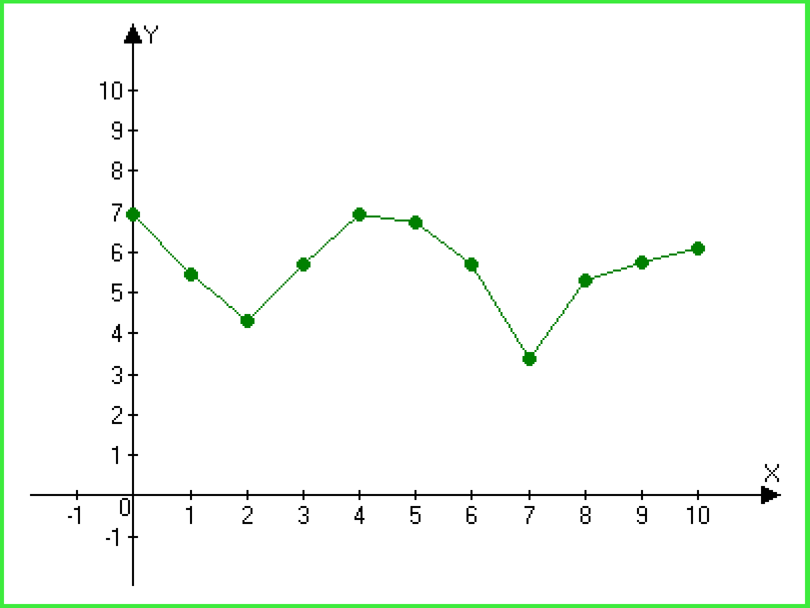
1. w każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1}) \; (0 \leqslant i \leqslant n-1)$ jest wielomianem klasy Π_n .

2. ma ciągłą (k-1)-szą pochodną w przedziale $[t_0, t_n]$.

Funkcja sklejana stopnia 0.



Funkcja sklejana stopnia 1.



funkcje sklejane stopnia trzeciego

Wielomiany klasy Π_3 spełniające warunki:

$$S_{i-1}(t_i)=y_i=S_i(t_i)$$
$$S'_{i-1}(t_i)=S'_i(t_i)$$
$$S''_{i-1}(t_i)=S''_i(t_i)=z_i \quad (1\leqslant i\leqslant n-1)$$
$$z_0=0 \quad z_n=0$$

Wzór na $S_i(x)$ w przedziale $[t_i, t_{i+1})$:

$$S_i(x)=\frac{z_i}{6\mathrm{h}_i}(t_{i+1}-x)^3+\frac{z_{i+1}}{6\mathrm{h}_i}(x-t_i)^3+$$
$$+\left(\frac{y_{i+1}}{h_i}-\frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x-t_i)+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1}-x)$$

$$h_i=t_{i+1}-t_i$$

Wyznaczamy stałe z_i z równań:

$$h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) z_i + h_i z_{i+1} =$$
$$= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

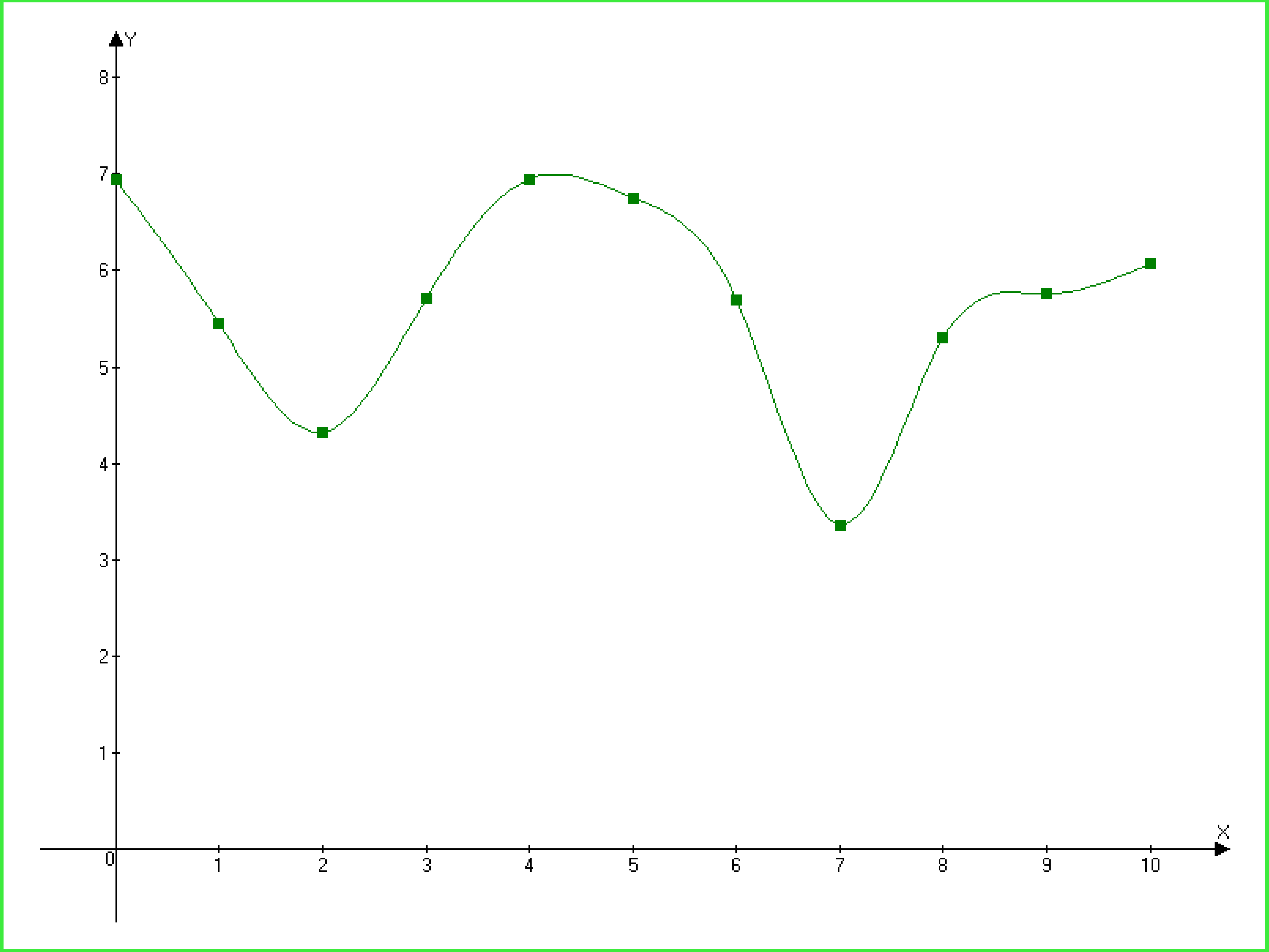
Wprowadzamy oznaczenia:

$$h_i = t_{i+1} - t_i, \quad u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}$$

Konstruujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Rezultat interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia dla 11 punktów.



funkcje sklejane hiperboliczne (ang. tension splines)

dane:

τ

$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$

Funkcję sklejaną hiperboliczną f określamy przyjmując, że:

1. w przedziale $[t_0, t_n]$ istnieje czwarta pochodna $f^{(4)}$.
2. są spełnione warunki interpolacyjne $f(t_i) = y_i \text{ dla } 0 \leqslant i \leqslant n$.
3. w każdym z przedziałów otwartych (t_{i-1}, t_i) jest $f^{(4)} - \tau^2 f'' = 0$.

$\tau \to 0$ funkcja sklejana trzeciego stopnia

$\tau \to \infty$ funkcja sklejana pierwszego stopnia

Funkcje mają spełniać warunki:

$$f_{i-1}(t_i) = y_i = f_i(t_i)$$
$$f'_{i-1}(t_i) = f'_i(t_i)$$
$$f''_{i-1}(t_i) = f''_i(t_i) = z_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$
$$z_0 = 0 \quad z_n = 0$$

Wzór funkcji w przedziale $[t_i, t_{i+1}]$

$$f(x) = \{z_i \sinh[\tau(t_{i+1} - x)] + z_{i+1} \sinh[\tau(x - t_i)]\} / [\tau^2 \sinh(\tau h_i)] +$$
$$+ (y_i - z_i/\tau^2)(t_{i+1} - x)/h_i + (y_{i+1} - z_{i+1}/\tau^2)(x - t_i)/h_i$$
$$h_i = t_{i+1} - t_i$$

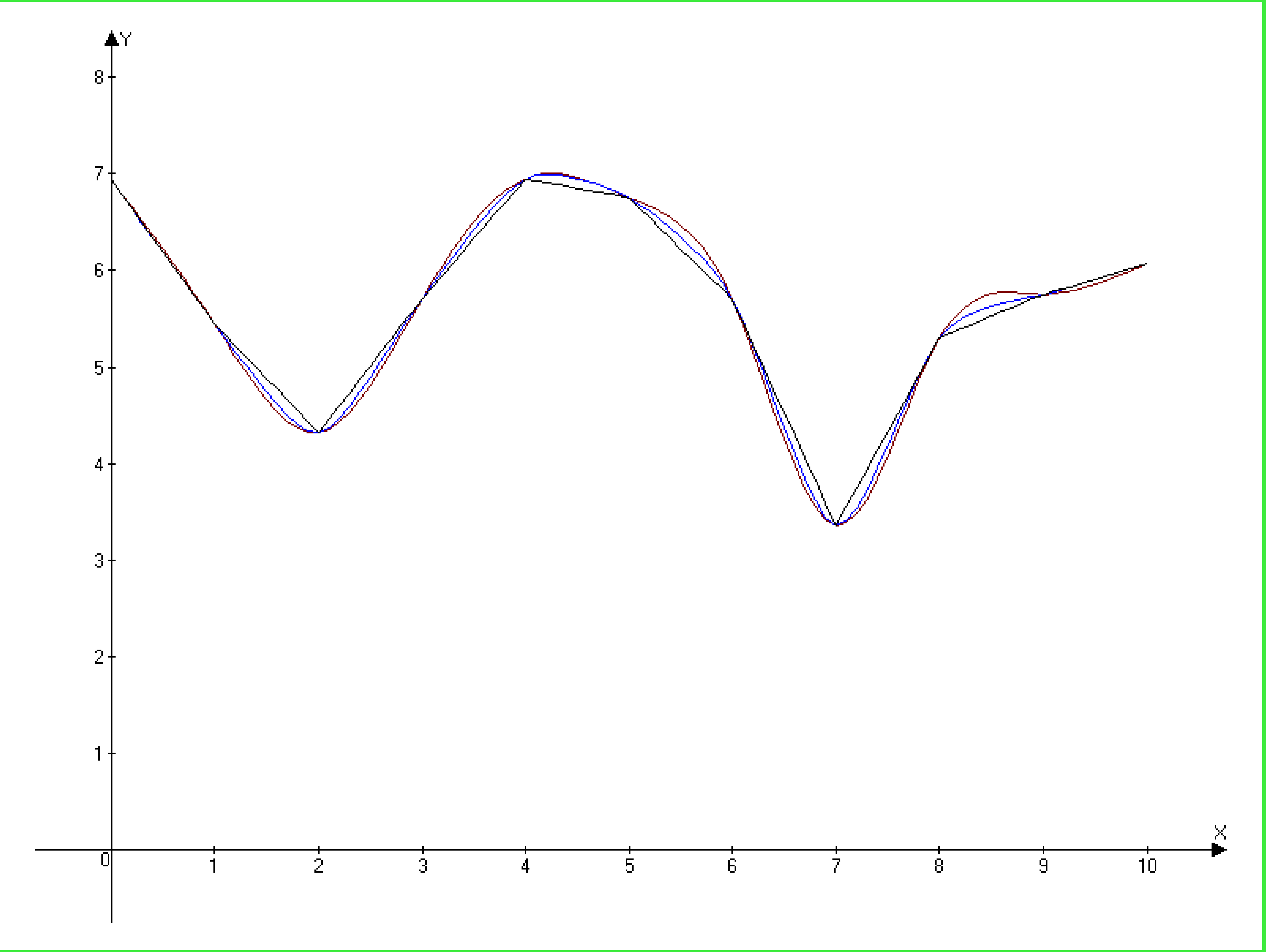
z_i wyznaczamy z równań:

$$\alpha_{i-1} z_{i-1} + (\beta_{i-1} + \beta_i) z_i + \alpha_i z_{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

gdzie:

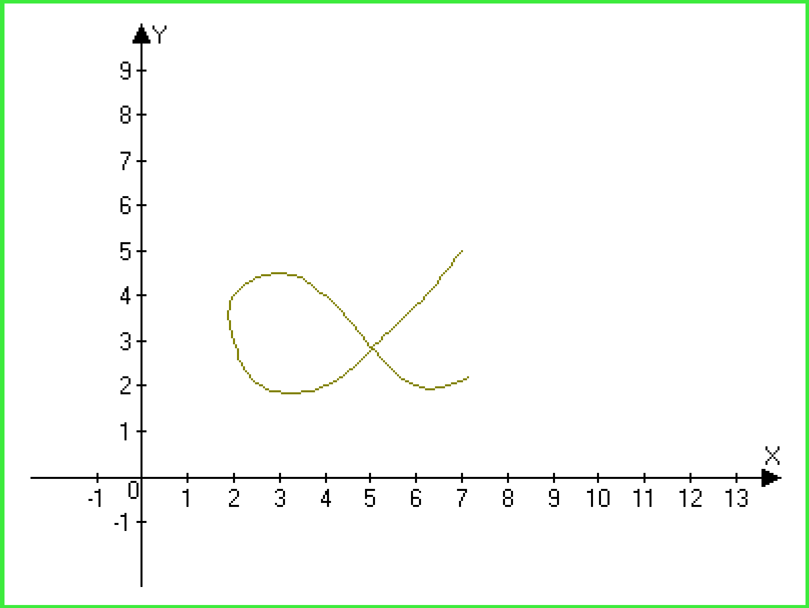
$$\alpha_i = 1/h_i - \tau/\sinh(\tau h_i), \qquad \beta_i = \tau\, ctgh(\tau h_i) - 1/h_i,$$
$$\gamma_i = \tau^2 (y_i + 1 - y_i)/h_i$$

Rezultat interpolacji funkcjami sklejanymi hiperbolicznymi dla różnych wartości parametru τ dla 11 punktów.



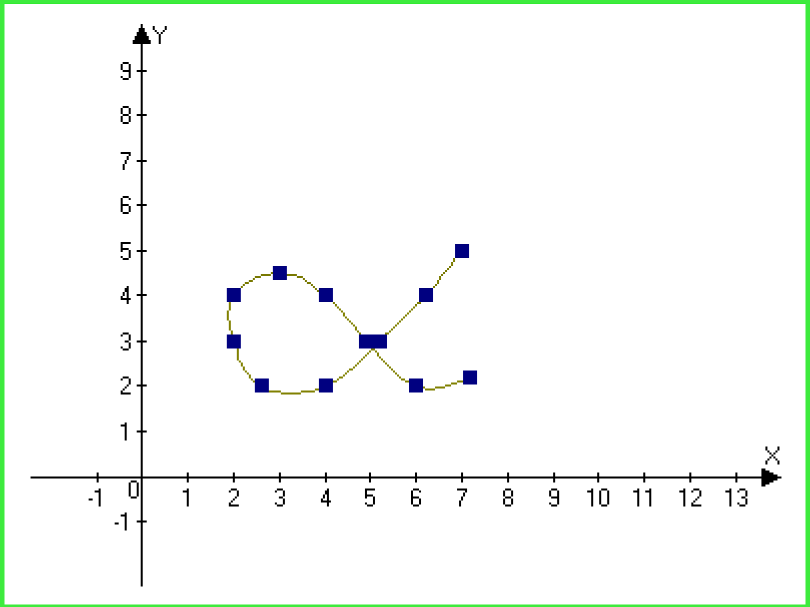
interpolacja krzywych

Wyjściowa krzywa



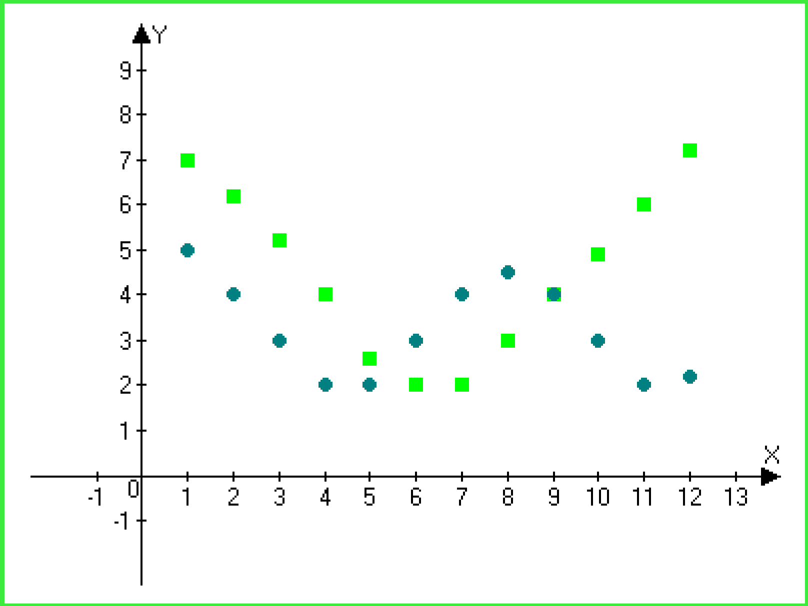
Wybór punktów na krzywej

$$(x_i, y_i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

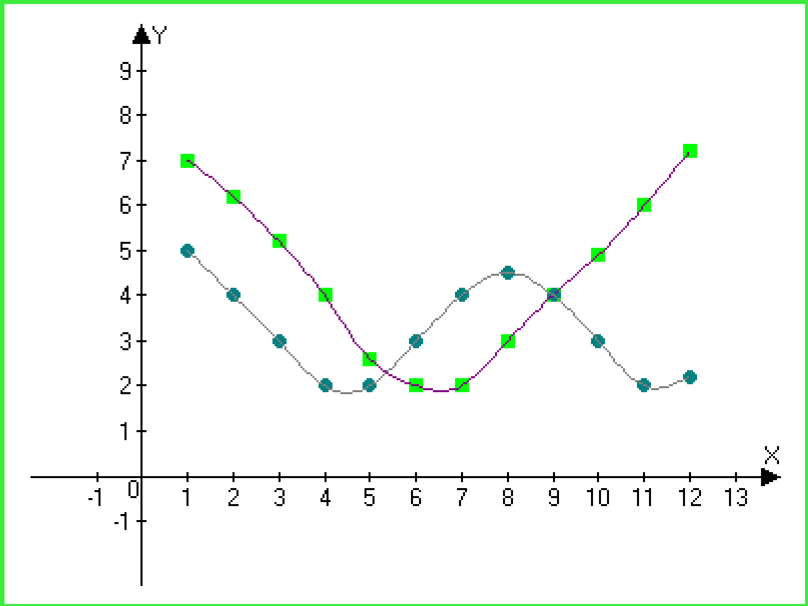


Rozkład na 2 funkcje

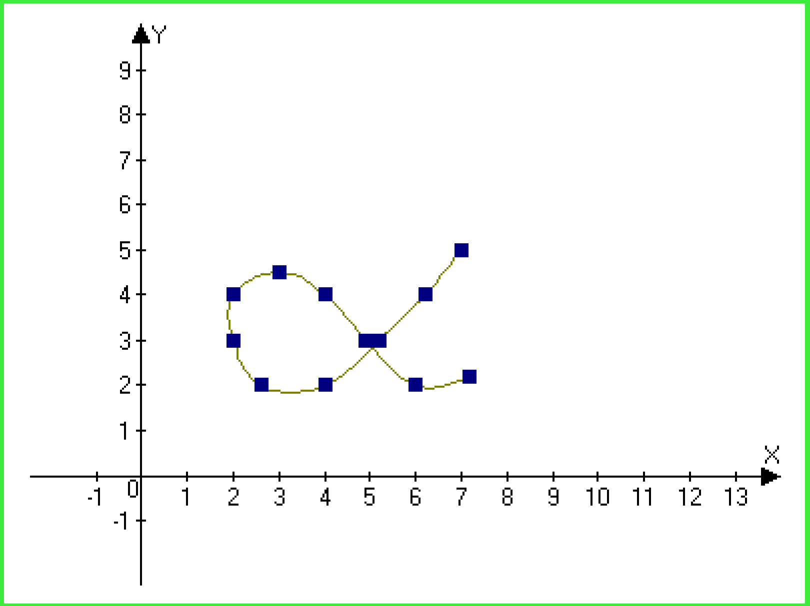
$$x_i = f(i)$$
$$y_i = f(i) \qquad i = 1, \dots, n$$



Interpolacja funkcji składowych



Złożenie funkcji



dziękuję za uwagę

Źródło:
Kincaid David, Cheney Ward, *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006