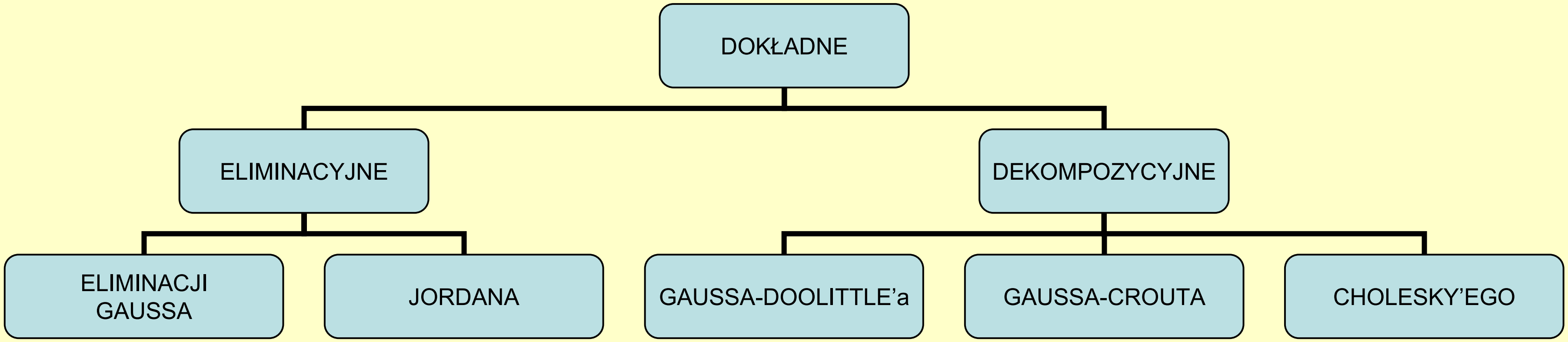
NUMERYCZNE METODY ROZWIĄZYWANIA ROWNAŃ LINIOWYCH

PRZYGOTOWAŁA:
ANNA BANAŚ
KoMBo, WILiŚ

PODZIAŁ


DOKŁADNE
ELIMINACYJNE
DEKOMPOZYCYJNE
ELIMINACJI GAUSSA
JORDANA
GAUSSA-DOOLITTLE'a
GAUSSA-CROUTA
CHOLESKY'EGO

METODY ELIMINACYJNE
METODA GAUSSA

$$[A]\{X\}=\{P\}$$

$$\begin{bmatrix} \text{- - - - -} \\ \text{- - - - -} \\ \text{- - - - -} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \texttt{---------} \\ \texttt{00-------} \\ \texttt{0000-----} \\ \texttt{000000---} \\ \texttt{00000000-} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P' \end{Bmatrix}$$

ETAPY ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ:

- I ETAP- eliminacja

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - [(a_{ik}^{(k-1)}/ a_{kk}^{(k-1)})* a_{kj}^{(k-1)}]$

Gdzie $k=1,2,\ldots,n-1$
$i=k+1,k+2,\ldots,n$
$j=k+1,k+2,\ldots,n+1$

Przybliżona ilość operacji: $n^3/3$

- II ETAP- rekursja

$x_j=(1/ a_{ii}^{(i-1)})[a_{in+1}-\Sigma_{j=i+1}^{n}(a_{ij}^{(i-1)\ x}a_i\ )]$

Gdzie $i=n,n-1,\ldots,1$

Przybliżona ilość operacji: $n^2/2$

Liczba wszystkich operacji w przybliżeniu: n^3

PRZYKŁAD

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{Bmatrix}$$

W pierwszym kroku odejmujemy stronami pierwsze równanie pomnożone przez 2 od drugiego.

Pomnożone przez ½ odejmujemy od trzeciego

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{Bmatrix}$$

I pomnożone przez -1 od czwartego

Liczby 2, ½ i -1 nazywamy mnożnikami dla pierwszego kroku eliminacji

Liczbę 6 używaną jako dzielnik przy ich obliczaniu-elementem głównym.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{Bmatrix}$$

Odejmujemy drugi wiersz pomnożony razy 3 od trzeciego wiersza i pomnożony razy -1/2 od czwartego

$$\begin{Bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

W ostatnim kroku odejmujemy trzecie równanie pomnożone przez 2 od czwartego.

- Otrzymaliśmy układ o macierzy trójkątnej górnej
- Nowy układ łatwo rozwiązać wyznaczając niewiadome od ostatniej do pierwszej (rekursja)

Rozwiązanie układu:

$$X = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

ZNACZENIE ELEMNTÓW GŁOWNYCH

Algorytm Gaussa zawodzi w wielu układach, które maja w istocie bardzo łatwe rozwiązanie.

1) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Wspomniany sposób rozwiązania zawodzi gdyż już pierwszy element główny jest równy 0.

2) $$\begin{bmatrix} E & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Gdzie E jest małą liczbą rożną od 0.

Układ nie powinien stwarzać kłopotów jak poprzedni.

- Po przekształceniu za pomocą algorytmu Gaussa otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} E & 1 \\ 0 & 1\text{-}E\text{^-}1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\text{-}E\text{^-}1 \end{Bmatrix}$$

Ma on rozwiązanie :

X2=(2-E^-1)/(1-E^-1),

X1=(1-x2)E^-1

W obliczeniach komputerowych, gdy E jest dostatecznie małe, wartością obu różnic jest –E^-1.

Otrzymujemy więc x2=1, a więc x1=0.

Jednak rozwiązanie dokładne jest inne

X1=1/(1-E)≈1

X2=(1-2E)/(1-E) ≈1

Trudności jakie napotkaliśmy w tych przykładach, znikają po przestawieniu równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ E & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Stosując tu eliminację Gaussa otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1-2E \end{Bmatrix}$$

Obliczone x2=1,

ale x1=2-x2

Więc x1=1

Powyższe przykłady pokazują, że dobry algorytm musi uwzględniać przestawienie równań układu, gdy wymagają tego okoliczności.

METODA JORDANA

$$\begin{bmatrix} ----- \\ ----- \\ ----- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100000000 \\ 001000000 \\ 000010000 \\ 000000100 \\ 000000001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P' \end{Bmatrix}$$

ETAPY ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ

- w metodzie tej mamy tylko eliminacje

$a_{kj}^{(k)} = (a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)})$

Gdzie j-1,2,…,n+1

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} * a_{kj}^{(k)}$

Gdzie j=1,2,…,n+1

i=1,2,…,n (i≠k)

METODY DEKOMPOZYCYJNE

- Przypuśćmy, że macierz A można wyrazić jako iloczyn macierzy trójkątnej dolnej L i trójkątnej górnej U:

$$A=L*U$$

Dla danej macierzy stopnia n szukamy:

$$\begin{pmatrix} \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \texttt{-00000000} \\ \texttt{--0000000} \\ \texttt{----00000} \\ \texttt{------000} \\ \texttt{---------} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \texttt{---------} \\ \texttt{00-------} \\ \texttt{0000-----} \\ \texttt{000000---} \\ \texttt{00000000-} \end{pmatrix}$$

- Wtedy rozwiązanie układu równań Ax=b dzieli się na dwa etapy:
  Lz=P względem z,
  Ux=z względem x.

Ax=P
LUx=P
Ux=z
Lz=P→z
Ux=z

Rozkładowi zostaje poddana tylko macierz A, niezmieniony pozostaje wektor P. Mamy tutaj dwie rekursje

- Dla każdego i można wybrać dowolną wartość różną od zera dla jednej z liczb l_{ii} albo u_{ii} (ale nie dla obu)

  Możemy więc przyjąć
  - l_{ii}=1 dla i=1,2,…,n
    mamy wtedy macierz jednynkową trójkątną dolna.
  -u_{ii}=1 dla i=1,2,…,n
    mamy wtedy macierz jednynkową trójkątną górną.

METODA GAUSSA-DOOLITTLE'A

- Zakładamy w niej „jedynyki" na głównej przekątnej macierzy L

```
 ---------        100000000       ---------
 ---------        --1000000   *   00-------
 ---------   =    ---100000       0000-----
 ---------        -----1000       000000---
 ---------        --------1       00000000-
```

$$u_{kj} = a_{kj} - \Sigma_{r=1}^{k-1} (l_{kr}u_{rj})$$

$$j=k,k+1,\dots,n$$

$$l_{ik}= a_{ik}-\Sigma_{r=1}^{k-1}((l_{ir}u_{rk})/u_{kk}$$

$$i=k+1,k+2,\dots,n$$

METODA GAUSSA-CROUT'A

- Zakładamy w niej „jedynyki” na głównej przekątnej macierzy U

$$
\begin{pmatrix}
\text{---------} \\
\text{---------} \\
\text{---------} \\
\text{---------} \\
\text{---------}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\text{-00000000} \\
\text{--0000000} \\
\text{----00000} \\
\text{------000} \\
\text{---------}
\end{pmatrix}
*
\begin{pmatrix}
\text{1--------} \\
\text{001------} \\
\text{00001----} \\
\text{0000001--} \\
\text{000000001}
\end{pmatrix}
$$

$$l_{ik}= a_{ik}-\Sigma_{r=1}{}^{k-1}(l_{ir}u_{rk})$$

i=k+1,k+2,…,n

$$u_{kj} = (a_{kj} -\Sigma_{r=1}{}^{k-1} (l_{ir}u_{rj}))/l_{kk}$$

j=k,k+1,…,n

METODA CHOLESKY'EGO

Andre Louis Cholesky zaproponował jedną z wersji rozkładu macierzy na czynniki typu LL^T.

Udowodnił on że:

TW. Jeżeli macierz A jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona, to ma ona rozkład na czynniki $A = LL^T$, gdzie L jest macierzą trójkątną o elementach dodatnich na głównej przekątnej.

$$A = L * L^T$$

$$\begin{pmatrix} \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \\ \texttt{---------} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \texttt{-00000000} \\ \texttt{--0000000} \\ \texttt{----00000} \\ \texttt{------000} \\ \texttt{---------} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \texttt{---------} \\ \texttt{00-------} \\ \texttt{0000-----} \\ \texttt{000000---} \\ \texttt{00000000-} \end{pmatrix}$$

$$L_{kk} = (a_{kk} - \Sigma_{r=1}^{k-1}(s_{kr}\hat{}2))\hat{}1/2$$

$$u_{ik} = (a_{ik} - \Sigma_{r=1}^{k-1} (s_{ir}s_{kr}))/s_{kk}$$

$$i=k+1,\dots,n$$

Wadą tej metody jest występowanie pierwiastka, który znacznie wydłuża czas obliczeń.

PRZYKŁAD

Rozwiązanie za pomocą metody Gauusa-Crout'a

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{Bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -1 & 0{,}5 & \\ 3 & 3{,}5 & 4 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

u12=a12/l11=-5/2=-2,5

u13=a13/l11=1/2=0,5

l22=a22-l21*u12=3-(-1)*(-2,5)=0,5

l32=a32-l31*u12=-4-3*(-2,5)=3,5

u23=(a23-l21*u13)/l22=(-1-(-1)*0,5)/0,5=-1

l33=a33-l31*u13-l32*u23=2-3*0,5-3,5*(-1)=4

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Źródła:

Wykłady dr hab. inż. Pawła Kłosowskiego prof. ndzw. PG

Kincaid David, Cheney Ward, *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006